Modelle und Optimierungsansätze zur Analyse des kollektiven Bausparens

Inauguraldissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Diplom-Volkswirt Franz Gotterbarm
aus Bonn

Bonn 1985

Modelle und Optimierungsansätze zur Analyse des kollektiven Bausparens

Inauguraldissertation
zur
Erlangung des Grades eines Doktors
der Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften
durch die
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Diplom-Volkswirt Franz Gotterbarm
aus Bonn

Bonn 1985

Dekan: Professor Dr. Rolf Knütel

Erstberichterstatter: Professor Dr. Bernhard Korte

Zweitberichterstatter: Professor Dr. Manfred Perlitz

Tag der mündlichen Prüfung: 22. / 23. 8. 1985

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 1

1 Die Idee des Bausparens, Bausparsysteme, Bausparmathematik als Analyseinstrumentarium 5

1.1 Die grundlegende Idee 6

1.1.1 Das geschlossene Bausparkollektiv 6

1.1.2 Das offene Bausparkollektiv 7

1.2 Bausparsysteme 8

1.3 Bausparmathematik als Analyseinstrumentarium 10

1.3.1 Stand, Aufgaben und Perspektiven der Bausparmathematik 10

1.3.2 Bausparmathematische Modellbildung 12

2 Definition der Modellparameter anhand des zeitlichen Ablaufs eines Bausparvertrages 14

2.1 Vertragsabschluß und Soforteinzahlung 15

2.2 Die Sparphase 15

2.3 Die Zuteilung 17

2.3.1 Vertragliche Mindestbedingungen 17

2.3.2 Die Sparerleistung 17

2.3.3 Bewertungsverfahren 19

2.3.3.1 Die Saldenmethode 19

2.3.3.2 Die Zinsmethode 20

2.3.3.3 Die Guthaben–Zins–Methode 21

2.3.3.4 Die verallgemeinerte Methode 22

2.3.4 Einmaleinzahlung vor Zuteilung 23

2.3.5 Darlehensvergabe 23

2.4 Die Darlehensphase 25

2.4.1 Der grundsätzliche Ablauf der Darlehensphase 25

2.4.2 Die Kassenleistung und der Belastungsgrad 25

2.4.3 Neuere Modelle der Darlehensabwicklung 26

3 Das Formelmodell 29
3.1 Die formelmäßige Erfassung eines einzelnen Bausparvertrages 31
3.1.1 Die Sparphase 31
3.1.1.1 Die Behandlung der Abschlußgebühr 31
3.1.1.2 Die Verzinsung der Bausparguthaben 33
3.1.1.2.1 Die Verzinsung in der Bausparpraxis 33
3.1.1.2.2 Die Verzinsung im Formelmodell 39
3.1.1.3 Die Berechnungsformeln für das Bausparguthaben und die Zinssumme 41
3.1.1.4 Die Sparerleistung und die Saldensumme 44
3.1.1.5 Guthaben und Saldensumme bei Beendigung des Sparprozesses 45
3.1.2 Die Zuteilung nach Zielbewertungszahl 48
3.1.2.1 Der Fall regelmäßiger Sparraten bis zur Zuteilung 49
3.1.2.1.1 Die Bestimmungsgleichung für die Wartezeit bis zur Zuteilung 49
3.1.2.1.2 Die Änderung der Wartezeit bei Änderung der Sparrate 51
3.1.2.1.3 Zur Änderung der Wartezeit bei Änderung des Guthabenszinses 56
3.1.2.2 Zuteilung bei Einstellung der regelmäßigen Sparraten bei Erreichen des Mindestanspargrades 58
3.1.3 Zur Berücksichtigung eines eventuellen Bonuszinses 60
3.1.4 Die Darlehensphase 61
3.1.4.1 Darlehenshöhe und Gebühren bei Darlehensvergabe 61
3.1.4.2 Die Verzinsung der Bauspardarlehen 62
3.1.4.3 Die Berechnungsformel für das Bauspardarlehen 62
3.1.4.4 Die Tilgungsdauer 64
3.1.4.5 Die Kassenleistung 64
3.1.4.6 Die Berücksichtigung einer Stufentilgung 65
3.1.4.7 Jährlich steigende Tilgungsbeiträge 66
3.1.4.7.1 Das Bauspardarlehen bei steigender Tilgung 66
3.1.4.7.2 Die Tilgungsdauer bei steigender Tilgung 70
3.1.4.7.3 Die Kassenleistung bei steigender Tilgung 71

3.1.5 Der einzelne Bausparvertrag aus der Sicht der Bausparkasse als Unternehmen 72
3.1.5.1 Der Belastungsgrad (Kassen- zu Sparerleistung) 72
3.1.5.2 Barwerte 75
3.1.5.2.1 Definition des Barwertes 75
3.1.5.2.2 Der klassische Barwert eines Bausparvertrages (Gesamtbarwert) 75
3.1.5.2.3 Der Barwert aus Zinsen und Gebühren (Ertragsbarwert) 78
3.1.5.2.4 Der Liquiditätsbarwert 83
3.2 Die formelmäßige Abbildung eines Bausparkollektivs 84
3.2.1 Einschichtige Bausparkollektive 84
3.2.1.1 Der Begriff des Beharrungszustandes 85
3.2.1.2 Spargeldeingang und Bauspareinlagen 90
3.2.1.3 Tilgungseingang und Bauspardarlehen 94
3.2.1.4 Der Anlegungsgrad und die verallgemeinerte Kassengleichung 96
3.2.1.5 Die Zuteilung nach der verallgemeinerten Kassengleichung 99
3.2.1.6 Die kontinuierliche Version des Formelmodells 100
3.2.1.7 Der Zinsüberschuß und die Zinsspanne 103
3.2.2 Mehrschichtige Bausparkollektive 110
3.2.2.1 Zuteilung nach Zielbewertungszahl 110
3.2.2.2 Zuteilung nach der verallgemeinerten Kassengleichung 111

4 Das Simulationsmodell 115
4.1 Begründung und Erläuterung des Modellansatzes 116
4.2 Der Aufbau des Simulationsmodells 121
4.3 Die Abbildung verschiedener Bauspartarife und Sparverhalten im Simulationsmodell 124

5 Verfahren zur Bestandsanpassung 129
5.1 Allgemeines zur Bestandsanpassung 130
5.1.1 Motivation für die Einbeziehung der konkreten Lage einer Bausparkasse in bauspartechnische Analysen 130
5.1.2 Die Methode der Bestandsanpassung 132
5.1.3 Ziele der Bestandsanpassung und ihre Überprüfung 133
5.2 Die optimierte Bestandsanpassung 135
5.2.1 Der Modellansatz 135
5.2.2 Die mathematische Formulierung des Problems 137
5.2.2.1 Definition und Erläuterung der benutzten Variablen und Parameter 137
5.2.2.2 Die Zielfunktion 138
5.2.2.3 Die Nebenbedingungen 139
5.2.2.3.1 Definitionsgleichungen 139
5.2.2.3.2 Das Neugeschäft 141
5.2.2.3.3 Obere und untere Schranken für die Neugeschäftsanteile der Sparerschichten 142
5.2.2.3.4 Schranken für die jährlichen Schwankungen der Neugeschäftsanteile 142
5.2.3 Verfahren zur Lösung des mathematischen Problems 143
5.2.3.1 Formaler Lösungsansatz 144
5.2.3.2 Konstruktion eines speziellen numerischen Lösungsverfahrens mit Methoden der nichtlinearen Programmierung 152
5.2.3.2.1 Das allgemeine Koordinatenabstiegsverfahren 153
5.2.3.2.2 Eindimensionale Optimierungsverfahren (Line-Search) 154
5.2.3.2.3 Die Berücksichtigung der bauspartechnischen Nebenbedingungen 155
5.2.3.3 Linearisierung der Zielfunktion 160
5.2.3.4 Die Berücksichtigung weiterer Zielgrößen bei der Anpassung 163
5.2.4 Die Aussagekraft gefundener Lösungen 164
5.2.4.1 Die Identifizierbarkeit der Kollektivzusammensetzung 164
5.2.4.2 Die Prognosequalität des Bestandsanpassungsmodells 170
5.2.5 Anwendungstests für die optimierte Bestandsanpassung 171

6 Anwendungsbeispiele für die entwickelten Modelle 183
6.1 Die Wirkungen der Zahlungsgewohnheiten der Bausparer 184
6.1.1 Wahl des Zahlungszeitpunktes 184
6.1.2 Änderungen des Sparverhaltens 192
6.2 Interdependenzen zwischen Sparerschichten eines Bausparkollektivs 198
6.2.1 Zielbewertungszahlen und Wartezeiten verschiedener Sparerschichten bei unterschiedlichen Anlegungsgraden 198
6.2.2 Subventionierungseffekte zwischen Sparerschichten 201
6.3 Tarifanalyse am Beispiel eines Universaltarifes 210
6.3.1 Systematische Analyse der Liquiditäts- und Ertragswirkungen 211
6.3.2 Die Behandlung spezifischer Probleme 222
6.3.2.1 Die schnelle Entwicklung der Bewertungszahl 222
6.3.2.2 Die reduzierte Funktion der Zielbewertungszahl 223
6.3.2.3 Das Auffüller-Problem 226
6.4 Vorbereitung und Unterstützung geschäftspolitischer Entscheidungen 234
6.4.1 Tarif- und Kollektivsteuerung 236
6.4.2 Berechnung einer bauspartechnischen Rückstellung 247
6.4.2.1 Der unternehmensorientierte Ansatz 249
6.4.2.2 Der generelle Ansatz 250

Verzeichnis der Variablennamen und Symbole 263

Die wichtigsten Formeln und Bestimmungsgleichungen des Formelmodells aus Teil 3 265

Abkürzungsverzeichnis 267

Literaturverzeichnis 269

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546505_0020

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist in erster Linie methodischer Natur. Es werden bereits bestehende mathematische Methoden zur Analyse von Bausparkollektiven weiterentwickelt und neue Methoden vorgestellt. Hier wird bewußt das bestehende Bausparsystem in der Bundesrepublik Deutschland nicht grundsätzlich hinterfragt und auf seine Funktionstüchtigkeit und Zukunftsaussichten hin untersucht, sondern als reales System und Untersuchungsobjekt hingenommen.

Die üblichen mathematischen Analyseinstrumente zur Untersuchung von Bausparkollektiven beschränkten sich in der Vergangenheit vorwiegend auf das Denkmodell des Beharrungszustandes. Dieser stationäre Zustand eines Bausparsystems tritt nach gewisser Zeit immer dann ein, wenn die strukturelle Zusammensetzung des Neugeschäfts über die Zeit konstant bleibt und sein Volumen exponentiellem Wachstum unterliegt. Dieses zur Untersuchung der grundsätzlichen Funktionsweise von Bausparkollektiven geeignete Instrument läßt jedoch keine realistischen mittelfristigen Analysen zu, sondern nur idealtypische langfristige. Hauptanliegen dieser Arbeit ist die Entwicklung von Methoden, die Untersuchungen unter realistischen Bedingungen ermöglichen, aus denen quantifizierbare kurz- und mittelfristige Ergebnisse abgeleitet werden können.

Teil 1 erläutert kurz das Prinzip des Zwecksparens, das dem kollektiven Bausparsystem zugrundeliegt und gibt einen Überblick über die historische Entwicklung und die heutige Bedeutung des Bausparens. Außerdem wird der gegenwärtige Stand der mathematischen Modelle und ihrer Aufgaben und Perspektiven aus der Sicht des Verfassers dargelegt.

In Teil 2 werden die Parameter, die den Modellen der vorliegenden Arbeit gemeinsam sind, anhand des Ablaufs eines Bausparvertrages beschrieben.

In Teil 3 wird das in der Bausparmathematik übliche Analyseinstrument "Formelmodell" weiterentwickelt. Der Wert des mathematischen Formelmodells liegt vorwiegend in seiner Verwendbarkeit für bauspartechnische Analysen am Beharrungszustand von Bausparkollektiven. Zweck dieses Teils der Arbeit ist es, für die Theorie des Bausparens ein umfassendes mathematisches Modell zur Verfügung zu stellen. Das *mathematische Formelmodell* ermöglicht die systematische Analyse von verschiedenen Bauspartarifen, Sparerverhalten und deren Folgen für die Liquiditäts- und Ertragslage einer Bausparkasse. Insbesondere

können strukturelle Wirkungszusammenhänge mit diesem Modell aufgezeigt und quantifiziert werden. Im Unterschied zu bisher entwickelten Modellen beinhaltet das hier vorgestellte Formelmodell auch die vielen Tarifmerkmale, die wegen ihres relativ geringen Einflußes auf die Aggregate des Bausparkollektivs in anderen Ansätzen ignoriert werden. Für die Bausparkasse als Unternehmen sind diese Merkmale wie zum Beispiel Abschlußgebühren, Darlehensgebühren, Agien, Disagien oder mehrstufige Tilgungspläne jedoch wichtige Bestimmungsgrößen des erwirtschafteten Überschusses. Gerade die jünste Entwicklung mit ihrer Vielfalt neuer Bauspartarife zeigt, daß diese bis vor einigen Jahren selten diskutierten "Marginalien" eine Rolle bei der Vermarktung des Produktes Bausparvertrag spielen. Das hier darzulegende Modell gestattet es, auch die Effekte von Änderungen dieser Größen zu studieren. Ein weiterer wesentlicher Unterschied zu bereits existierenden Modellen besteht darin, daß das Formelmodell nicht von der üblichen Kassengleichung ausgeht, die in der Praxis nie erfüllt ist. Vielmehr erlaubt dieses Modell Analysen unter Vorgabe einer Zielbewertungszahl oder einer Wartezeit bis zur Zuteilung. Das erstere entspricht der Situation, in der sich die Bausparkassen tatsächlich befinden. Es lassen sich also auch Situationen untersuchen, in denen der Anlegungsgrad (Anlagegrad) von 100 % verschieden ist.

Teil 4 stellt ein Simulationsmodell vor, das das Instrument für realistische bausparmathematische Untersuchungen ist, die auch kurz- und mittelfristige Aussagen treffen können. Die Grundkonzeption ist einfach. Es werden Bausparverträge abgeschlossen und entsprechende Bausparkonten angelegt, die genau so wie in der Realität auch geführt und abgewickelt werden. Aus diesen Bausparkonten werden alle interessierenden Aggregate und statistischen Werte des Bausparkollektivs berechnet. Die Anzahl und Ausgestaltung der abgeschlossenen Bausparverträge ist flexibel und kann je nach Fragestellung variiert werden. So ist es z.B. möglich, Bausparverträge mit den Tarifmerkmalen aller zur Zeit in der Bundesrepublik Deutschland angebotenen Bauspartarife zu simulieren. Zusätzlich kann die Zusammensetzung eines Bausparkollektivs aus Sparern in beliebigen Tarifen frei festgelegt werden. Auch das Spar- und Tilgungsverhalten der einzelnen Bausparer kann bestimmt werden. So kann also die tatsächliche Zusammensetzung eines existierenden Bausparkollektivs aus den verschiedensten Bauspartarifen und Sparertypen (wie z.B. Regelsparer, Soforteinzahler, Auffüller, Kündiger, Darlehensverzichter etc.) nachgebildet und durchgerechnet werden. Alle resultierenden Größen, die hierbei von Interesse sind (wie z. B. Anlegungsgrad,

Zuteilungsmasse, Zinsüberschuß , Bausparcinlagen, Bauspardarlehen etc.), werden mitberechnet und ausgegeben. Zusätzliche Freiheiten bestehen bei der Wahl der Neugeschäftsentwicklung, die für die Simulation unterstellt werden soll, bei der Zielbewertungszahl, bei der Anlage der nicht in Bauspardarlehen angelegten Zuteilungsmasse, beim Zins für die Aufnahme von Fremdgeld und bei anderen Parametern. Mit allen diesen Eingabeparametern kann mit dem Simulationsmodell ein relativ genaues Abbild des Neugeschäfts einer Bausparkasse konstruiert werden. Somit können Effekte untersucht werden, die auf das Zusammenwirken vieler unterschiedlicher Einflüsse zurückzuführen sind. Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Bauspartarifen oder Sparerschichten können dargestellt werden. Dies unterscheidet das Simulationsmodell grundlegend von Formelmodellen und allen bislang bekannten Ansätzen der Bausparmathematik.

In Teil 5 wird ein mathematischer Optimierungsansatz beschrieben, der es ermöglicht, bausparmathematische Analysen mit dem Simulationsmodell an den Rahmen einer konkreten Bausparkasse zu adaptieren. Die Optimierung liefert ein Abbild der jeweiligen Bausparkasse und ihrer kollektiven Bestände. Eine solche Bestandsanpassung wird benötigt, wenn nicht nur allgemeingültige Wenn Dann–Aussagen aus einer bauspartechnischen Untersuchung abgeleitet werden sollen, sondern darüber hinaus die konkreten Auswirkungen von gewissen Annahmen auf die Liquiditäts– und Ertragslage einer existierenden Bausparkasse quantifiziert werden sollen. Denn die kurz– und mittelfristige Entwicklung eines Bausparkollektivs hängt immer entscheidend vom Altbestand des Kollektivs ab.

Der Optimierungsansatz verteilt das tatsächliche Neugeschäft der Bausparkasse in allen Jahren auf Sparerschichten, die für das Kollektiv als repräsentativ erachtet werden können. Jede solche Verteilung erzeugt die Aggregate des Bausparkollektivs in gewisser Höhe. Durch Minimierung einer geeigneten Zielfunktion, in die die Abweichungen der erzeugten Zeitreihen der Bauspareinlagen, Bauspardarlehen, Vertragssummenbestände etc. von den tatsächlich realisierten Werten eingehen, kann eine optimale Abbildung des Altbestandes der Bausparkasse erreicht werden. Der Optimierungsansatz zur Bestandsanpassung ist das Kernstück der vorliegenden Arbeit. Der gesamte zugrundeliegende Problemzusammenhang wurde von der Bausparmathematik bisher nicht behandelt, da bausparmathematische Analysen bisher immer mit hypothetischen Kollektiven durchgeführt wurden. Mit den in Teil 5 vorgestellten Verfahren können erstmalig Untersuchungen durchgeführt werden,

die die spezifischen Gegebenheiten realer Bausparkollektive berücksichtigen.

Teil 6 dieser Arbeit befaßt sich mit typischen Anwendungsbeispielen des in den vorhergehenden Teilen entwickelten Instrumentariums. Auf der einen Seite werden die Einsatzmöglichkeiten des Formelmodells zu grundlegenden Untersuchungen z.B. an der systematischen Analyse von Bauspartarifen demonstriert. Auf der anderen Seite wird das Simulationsmodell teilweise in Verbindung mit einem Bestandsanpassungsmodell dazu benutzt, zeitliche Abläufe und Wirkungsstrukturen von bestimmten Vorgängen in Bausparkollektiven aufzuzeigen. Diese Art von Untersuchungen werden hier zum ersten Mal demonstriert.

Teil 1

Die Idee des Bausparens, Bausparsysteme, Bausparmathematik als Analyseinstrument

In 1.1 wird die Idee des Bausparens an sich und in 1.2 ihre praktische Ausgestaltung insbesondere in der Bundesrepublik Deutschland dargelegt. Zu diesem Themenkreis gibt es eine große Menge von Literatur, in der vielfältige Aspekte des Bausparens eingehend behandelt werden. Im Literaturverzeichnis sind wichtige Quellen zusammengestellt. Eine umfassende Bibliographie zum Thema Bausparen findet sich in der Dissertation von Gramer [1], die sich durch eine intensive Auswertung der Quellen auszeichnet.

In 1.3 werden Stand und mögliche Aufgaben der Bausparmathematik diskutiert. Insbesondere werden Modellierungsfragen erörtert.

1.1 Die grundlegende Idee

Der Kollektivgedanke, auf dem das Bausparen basiert, ist natürlich nicht auf diesen speziellen Zweck beschränkt. Der Zusammenschluß mehrerer Personen zur besseren Verwirklichung eines gemeinsamen Zwecks wird von jeder Genossenschaft praktiziert. Das gemeinsame Sparen, das die Vergabe von Darlehen zur frühzeitigen Realisierung einer beabsichtigten Anschaffung ermöglicht (Zwecksparen), funktioniert genauso für beliebige andere Zwecke. Das in dieser Arbeit vorgestellte Instrumentarium ist aus diesem Grund mit gewissen Modifikationen auch auf andere kollektive Sparprozesse anwendbar.

1.1.1 Das geschlossene Bausparkollektiv

Das Standardbeispiel zur Verdeutlichung des Sinns des Bausparens geht von zehn Personen aus, die sich je ein Haus für 1000 Geldeinheiten bauen wollen. Sie können jedoch nur 100 Geldeinheiten im Jahr dafür sparen. Sind die zehn jeweils auf sich selbst angewiesen, so können sie alle erst nach einer Wartezeit von zehn Jahren, in der sie die volle Bausumme angespart haben, ihr Haus bauen. Zahlen sie ihre jährlichen Sparbeiträge jedoch in einen gemeinsamen Fonds, so kann aus diesem bereits nach einem Jahr der Bau des ersten Hauses finanziert werden. Eines der zehn Kollektivmitglieder erhält also schon nach einem Jahr ein Darlehen von 90 % seiner Bausumme, das er durch seine weiteren Einzahlungen (nun Tilgungs—, nicht mehr Sparbeiträge) in den folgenden neun Jahren tilgt. Der Geldeingang

[1] vgl. Gramer, W., Das Wartezeitproblem der Bausparkassen, Diss. Freie Universität Berlin 1983, S. 240–277.

des Kollektivs bleibt also weiterhin konstant 1000 Geldeinheiten im Jahr. Es kann demnach mit Ablauf jeden Jahres ein weiteres Haus gebaut werden. Die Wartezeiten der Kollektivmitglieder betragen also $1, 2, \ldots, 9, 10$ Jahre statt 10 Jahre für jeden bei der Einzelansparung. Nur ein Kollektivmitglied steht genauso "schlecht", als wenn es alleine gespart hätte, die anderen neun haben einen mehr oder weniger großen Vorteil vom Kollektiv. Die durchschnittliche Wartezeit der zehn Bausparer beträgt 5,5 Jahre, also nur gut die Hälfte der Wartezeit eines "Alleinsparers". Diese Wartezeit heißt in der Bauspartechnik "mittlere Wartezeit" und spielt eine wesentliche Rolle für die Beurteilung von Bauspartarifen.

Dieses Beispiel, an dem der Sinn des Bausparens besonders einfach einleuchtet, ist natürlich in vieler Hinsicht vereinfachend. Zum einen ignoriert es die Möglichkeit externer Kreditaufnahme, mit der auch ein "Alleinsparer" schon vor der vollen Ansparung der Bausumme sein Haus bauen kann. Zum anderen wird nicht berücksichtigt, daß es i.a. Zinsen auf Spareinlagen gibt und Zinsen auf Darlehen zu entrichten sind. Auch die mittlere Wartezeit von 5,5 Jahren ist nicht zwingend. Leisten die Kollektivmitglieder ihre Zahlungen z.B. zu Beginn jeden Jahres, so betragen die einzelnen Wartezeiten $1, \ldots, 8, 9$ Jahre, die mittlere Wartezeit also 4,5 Jahre. Geht man von einem größeren Kollektiv (z.B. 120 Bausparer) mit monatlichen Sparbeiträgen in Höhe von $\frac{1}{120}$ der Bausumme aus, so erhält man Wartezeiten von $1, 2, \ldots, 119, 120$ Monaten, also eine mittlere Wartezeit von 60,5 Monaten oder 5,04 Jahren. Der Grenzwert der mittleren Wartezeit für immer mehr Sparer und immer kürzer werdende Einzahlungsintervalle liegt bei 5 Jahren oder allgemein bei der Hälfte der Ansparzeit des "Alleinsparers".

Das entscheidende Problem beim geschlossenen Bausparkollektiv liegt jedoch darin, daß die mittlere Wartezeit nur statistischen Wert hat. Unter den einzelnen Bausparern gibt es eine eindeutige Rangfolge der Vorteile aus dem kollektiven Sparprozeß. Es ist hier nicht möglich, die durch das Kollektiv entstehenden Vorteile mehr oder weniger gleichmäßig auf die Kollektivmitglieder aufzuteilen. So entwickelte sich konsequenterweise die Idee des offenen Bausparkollektivs, in dem unter gewissen Voraussetzungen alle Mitglieder vom Vorteil des Kollektivgedankens gleichmäßiger profitieren können.

1.1.2 Das offene Bausparkollektiv

Der wesentliche Unterschied zum geschlossenen Bausparkollektiv liegt darin,

daß das Kollektiv in jedem Jahr für einen Neuzugang an Sparern offengehalten wird. Jedes Jahr kommt eine weitere Generation von 10 Sparern zum Kollektiv hinzu. Der Geldeingang des Kollektivs beträgt im zweiten Jahr also 2000 Geldeinheiten, im dritten 3000, ... und im zehnten Jahr 10000. Das Kollektiv besteht nun aus 10 Abschlußjahrgängen zu 10 Sparern, also 100 insgesamt. Nach diesem zehnten Jahr scheidet der erste Abschlußjahrgang aus dem Kollektiv aus, d.h. er ist nun abgewickelt und wird gerade durch den elften Abschlußjahrgang ersetzt. Diese Substitution findet in den weiteren Jahren statt, so daß das Kollektiv nun konstant aus 100 Sparern mit einem jährlichen Geldeingang von 10000 Einheiten besteht. Dieser reicht aus, um genau einen Abschlußjahrgang *zuzuteilen*, d.h. 10 Bausparer erhalten nun ihre *Bausparsummen* (je 1000 Geldeinheiten) ausbezahlt, um ihre Häuser bauen zu können. Die detaillierte Entwicklung eines solchen offenen Bausparkollektivs stellt z.B. Laux dar [1].

Die bereits aus dem geschlossenen Kollektiv bekannte mittlere Wartezeit von 5,5 Jahren ergibt sich daraus, daß ab dem zehnten Jahr je 5 Sparer mit einer Wartezeit von fünf bzw. sechs Jahren zugeteilt werden. Ab dem zehnten Jahr bleiben alle Größen des Bausparkollektivs konstant. Dieser stationäre Zustand eines Bausparkollektivs heißt in der Bausparmathematik statischer Beharrungszustand. Er bildet sich bei jedem offenen Bausparkollektiv mit *konstantem* Neugeschäft nach einer gewissen Zeit heraus.

Im offenen Kollektiv profitieren also unter der Annahme eines in jedem Jahr gleichen Neugeschäfts alle Kollektivmitglieder, und zwar ab dem Zeitpunkt des Eintretens des statischen Beharrungszustands fast gleichmäßig. Die Bausparer der ersten vier Abschlußjahrgänge profitieren mit Wartezeiten unter fünf Jahren zusätzlich vom Anlaufeffekt des Kollektivs. Bleibt ab irgendeinem Zeitpunkt das weitere Neugeschäft aus, so steigen die Wartezeiten der letzten Abschlußjahrgänge wieder bis auf 10 Jahre an.

1.2 Bausparsysteme

Dieser Abschnitt stellt die historische Entwicklung und die gegenwärtige Stellung des Bausparens im Finanzsystem der Bundesrepublick Deutschland kurz dar, um eine Einordnung des Untersuchungsgegenstandes zu schaffen. Da das

[1] vgl. Laux, H., Das kollektive Bausparen, Heidelberg 1973, S. 22.

Schwergewicht dieser Arbeit auf methodischem Gebiet liegt, wird im übrigen auf die reichhaltige diesbezügliche Literatur verwiesen[1] .

Der Beginn des kollektiven Bausparens liegt in England, wo ab 1775 etwa 50 "Building Societys" als Selbsthilfeeinrichtungen gegen die schlechten Wohnverhältnisse in den Städten tätig waren. Sie arbeiteten ausschließlich nach dem Prinzip des geschlossenen Kollektivs. Diese Bewegung übertrug sich ab 1831 auch auf die Vereinigten Staaten. In Deutschland liegt der Beginn der Bausparbewegung — nach einigen fehlgeschlagenen Versuchen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts — im Jahr 1924, dem Gründungsjahr der Bausparkasse Gemeinschaft der Freunde e.V. in Wüstenrot auf der Basis des offenen Kollektivs. 1929 schloß sich die Sparkassenorganisation mit der Gründung der Landesbausparkassen der bis dahin ausschließlich privaten Bewegung an.

Die heutige Bausparlandschaft mit 18 privaten und 13 öffentlichen Bausparkassen entstand aus dieser anfänglichen Situation erst nach mehreren grundsätzlichen Reformen. Auch das heutige Tarifsortiment bildete sich erst langsam heraus. Viele verschiedene Tarife wurden nur von einzelnen Bausparkassen für kurze Zeit angeboten. Der für die heutige Ausgestaltung des deutschen Bausparsystems wichtigste Meilenstein ist wohl die Einführung des Bausparkassengesetzes im Jahr 1973. Viele der bis dahin durch die Praxis, Rechtsprechung und Aufsichtsbehörden entstandenen Regeln und Normen für das Geschäft der Bausparkassen erhielten dadurch Gesetzesrang.

Über die Bedeutung des Bausparsektors im Rahmen des Finanzsystems geben folgende Zahlen Aufschluß, die den Monatsberichten der Deutschen Bundesbank entnommen wurden[2]. Ende 1983 hatten die deutschen Kreditinstitute ohne die Bausparkassen einen Bestand an Spareinlagen von 555 Mrd. DM. Die Bausparkassen hatten zum gleichen Zeitpunkt einen Bauspareinlagenbestand von

---

[1] Zur historischen Entwicklung von Bausparsystemen vgl. z.B. Kohlhase, D., Die Geschäftspolitik der öffentlichen Bausparkassen, Diss. Hamburg 1970, S. 5–12 — Gramer, W., Das Wartezeitproblem ..., a.a.O., S. 14–17 — Lehmann, W./ Schäfer, O., Bausparkassengesetz und Bausparkassenverordnung, Bonn 1973, S. 10–15 — Lütge, F., Wohnungswirtschaft, 2. Aufl., Stuttgart 1949, S. 269 — Lehmann, W., Wegbereiter der Bausparkassen, in: Festschrift Knoblauch, Beiträge zur Theorie und Praxis des Wohnungsbaus, Bonn 1959, S. 219 — Bausparkassenfachbuch 1980, Bonn 1980, S. 17 ff.;

Zur Bedeutung des Bausparens im Finanzsystem der Bundesrepublik Deutschland vgl. z.B. Bock, H., Das kollektive Bausparen, Frankfurt/M. 1984, S. 15–17 — Monatsberichte der Deutschen Bundesbank, 36. Jahrgang Nr. 4, April 1984, S. 40–43.

[2] vgl. Monatsberichte der DBB, a.a.O., S. 40–43.

125 Mrd. DM. Zählt man die Bauspareinlagen zu den Spareinlagen hinzu, so ergibt sich ein Anteil der Bausparkassen von 18,4% am Spareinlagenbestand des deutschen Bankensystems. Im Aktivgeschäft der Banken ohne Bausparkassen standen im Dezember 1983 1360 Mrd. DM an Krediten zu Buch, davon 565 Mrd. für den Wohnungsbau. Die Bausparkassen wiesen ein Volumen von 140 Mrd. DM an Baukrediten aus, davon 107 Mrd. im kollektiven Bereich und 33 Mrd. im Vor- und Zwischenfinanzierungsgeschäft. Der Anteil am gesamten Kreditvolumen betrug also 9,3% , der Anteil an den Wohnungskrediten 19,9% . Mit einem Anteil von etwa einem Fünftel am Spareinlagen- und Baukreditgeschäft spielt das Bausparsystem in der Bundesrepublik also eine wesentliche Rolle für das Finanzsystem.

1.3 Bausparmathematik als Analyseinstrumentarium

1.3.1 Stand, Aufgaben und Perspektiven der Bausparmathematik

Die Entwicklung der Bausparmathematik begann relativ bald nach Beginn des kollektiven Bausparens in Deutschland (1924, Gründung von GdF Wüstenrot). Um 1929–1932 beschäftigten sich verschiedene Autoren intensiv mit der grundsätzlichen theoretisch mathematischen Durchdringung der Vorgänge im Bausparkollektiv. Vorrangig zu nennen sind hier die Arbeiten von v. Beckerath[1)], Riebesell[2)], Krahn und Kaltenboeck[3)] und Vajda[4)]. Spätere wichtige Arbeiten sind z.B. die von Heubeck[5)] und Krahn[6)].

Diese Arbeiten haben äußerst wichtige Funktion erfüllt. Das in relativ kurzer Zeit sehr schnell gewachsene deutsche Bausparwesen bedurfte einer theoretischen Untermauerung seiner Funktionsfähigkeit. Mehr noch, für die Bausparkassen war und ist es notwendig, daß die Funktionsweise des kollektiven Bauspargeschäfts, die durch die Tarifmerkmale wesentlich geprägt ist, als Ganzes wie auch in ihren

---

1)vgl. Beckerath, U. von, Beitrag zur Bausparkassen-Mathematik, in: Blätter für Versicherungsmathematik, Bd. 1 (1929), S. 271–283 — Beckerath, U. von, Bausparkassen-Mathematik, in: Das Versicherungsarchiv, Jg. 2 (1931), Nr. 1, S. 1–15.

2)Riebesell, P., Bausparmathematik, in: Wirtschaft und Recht der Versicherung, Jg. 63 (1931), Nr. 3.

3)vgl. Krahn, A. / Kaltenboeck, B., Das deutsche Bausparen, Berlin 1931.

4)Vajda, S., Der derzeitige Stand der Bausparmathematik, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1933.

5)Heubeck, G., Beiträge zur mathematischen Theorie des Bausparens, Diss. Göttingen 1937.

6)Krahn, A., Technik des deutschen Bausparens, Ludwigsburg 1955.

einzelnen Komponenten verstanden wird. Es ist das Verdienst dieser Autoren, die Grundlagen für eine breite und weitergehende Einsicht in die bausparmathematischen Zusammenhänge geschaffen zu haben.

Spätere Analysen beschäftigten sich ausgehend von diesen grundsätzlichen Einsichten und Modellen häufig mit speziellen bauspartechnischen Fragestellungen. Besonders H. Laux hat durch seine vielfältigen Untersuchungen spezieller und aktueller Probleme[1)], die zum größten Teil auf seinem bausparmathematischen Gesamtmodell[2)] aufbauen, einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung der Bausparmathematik geleistet. Gemeinsam ist fast all diesen Untersuchungen jedoch, daß die Aussagen theoretischer und langfristiger Natur sind. Ansatzpunkt ist fast immer das Denkmodell des Beharrungszustandes (vgl. Abschnitt 3.2.1.1), entweder des statischen oder des dynamischen. Der Beharrungszustand ist gerade dadurch ausgezeichnet, daß sich im bestehenden Bausparkollektiv nichts ändert. Das Bauspargeschäft ist in jedem Jahr strukturell das gleiche, im statischen Beharrungszustand auch dem Volumen nach. Bis auf wenige Ausnahmen[3)] bauen alle bausparmathematischen Arbeiten auf diesem Konzept auf. Deswegen können die Schlußfolgerungen der klassischen Bausparmathematik immer nur grundsätzlicher, qualitativer Natur sein. Die Übertragung auf reale Bausparkollektive ist nur beschränkt möglich und kann sogar zu falschen Ergebnissen führen (vgl. z.B. 5.1.1).

Bausparmathematik muß sich von der allgemeinen Finanzmathematik und der Versicherungsmathematik aufgrund der unterschiedlichen Untersuchungsobjekte zwangsläufig wesentlich unterscheiden. Finanzmathematik beschäftigt sich mit einzelnen Objekten, Versicherungsmathematik hauptsächlich mit der

---

[1)] vgl. z.B. Laux, H., Der Anlaufeffekt im kollektiven Bausparen bei gleichbleibenden und steigenden Neuzugängen, in: Blätter der DGVM, Bd. XI, 1973/74, S. 585-604 – Laux, H., Über den Einfluß von Veränderungen der wartezeitverkürzenden Faktoren auf die Wartezeiten im Bausparkollektiv, in: Blätter der DGVM, Bd. XIII, 1977/78, S. 145-177 – Laux, H., Verlauf der Wartezeiten im kollektiven Bausparen bei verschlechterten Zugangsverhältnissen, in: Blätter der DGVM, Bd. XII, 1975/76, S. 57-77 – Laux, H., Die Wartezeitverlängerung im Bausparen bei Einstellung der Sparzahlungen nach Erreichen eines bestimmten Prozentguthabens, in: Blätter der DGVM, Bd. XII, 1975/76, S. 143–152.

[2)] vgl. Laux, H., Das kollektive Bausparen, Heidelberg 1973, S. 273-295 — Laux, H., Grundzüge der Bausparmathematik, in: Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 8, Karlsruhe 1978.

[3)] vgl. z.B. Laux, H., Die Zinsspanne der Bausparkassen bei gleichzeitigem Angebot von 3/5%- und 2,5/4,5%-Bauspartarifen, in: Blätter der DGVM, Bd. XIV, 1979/80, S. 461-486 — Bock, H., Das kollektive Bausparen, a.a.O., S. 79–105.

Risikokalkulation in geschlossenen Gruppen. Die Interdependenz verschiedener Abschlußjahrgänge in Bausparkollektiven stellt an die Bausparmathematik spezifische Anforderungen. Die Methoden der Finanzmathematik konnten für die Entwicklung der Bausparmathematik nur eine Grundlage sein, die speziell in Richtung auf die Analyse zeitlich interdependenter Systeme ausgebaut werden mußte. Die hauptsächlichen, dazu entwickelten Modelle sind die der Anlaufphase und des statischen bzw. dynamischen Beharrungszustandes. Wie bereits erwähnt bedienen sich fast alle bisherigen bausparmathematischen Untersuchungen dieser Methoden.

Die Realität des Bauspargeschäfts sieht in der Regel so aus, daß sich die Neugeschäftsentwicklung und das Sparverhalten je nach allgemeiner wirtschaftlicher Lage und nach den spezifischen Rahmenbedingungen des Bausparens, insbesondere der staatlichen Förderung, von Jahr zu Jahr ändern. Aus bausparkasseninternen Statistiken geht hervor, daß die Änderungen des Sparverhaltens dabei so erheblich sein können, daß Anteile einzelner Sparerschichten am Neugeschäft von Jahr zu Jahr um 20 Prozentpunkte oder mehr variieren. Über mehrere Jahre hinweg können sich daraus extreme Verschiebungen im Kollektiv ergeben, die drastische Veränderungen der Liquiditäts- und Ertragslage nach sich ziehen können. Insofern sind solche Kollektivverschiebungen besonders wichtige Determinanten der zukünftigen Situation einer Bausparkasse.

Soll die Bausparmathematik über die grundlegende Analyse hinaus Entscheidungshilfen für die laufende Geschäftspolitik der Bausparkassen liefern, so ist eine differenziertere Betrachtungsweise als die des Beharrungszustandes also unerläßlich. Zur Abbildung kurz- und mittelfristiger Entwicklungen, die regelmäßig Gegenstand der Geschäftspolitik sind, ist das Denkmodell des Beharrungszustandes unzureichend. Der Entwicklung bausparmathematischer Instrumentarien zur Analyse und Quantifizierung kurz- und mittelfristiger Effekte kommt angesichts der in den letzten Jahren dramatisch verschlechterten Geschäftslage der deutschen Bausparkassen wesentliche Bedeutung zu.

1.3.2 Bausparmathematische Modellbildung

Die herkömmliche Form bausparmathematischer Modelle wird hier als "Formelmodell" bezeichnet. Formelmodelle fassen das festgelegte Sparverhalten in deterministische mathematische Gleichungen, die formelhaft die Zusammenhänge

in Bausparkollektiven wiedergeben. Solche Formelmodelle wurden unter anderem von Krahn[1] und Laux[2] entwickelt und sind vor allem für die Analyse von Beharrungszuständen geeignet. Im Teil 3 der vorliegenden Arbeit wird ein weiterentwickeltes Formelmodell vorgestellt, das sich von früheren Modellen in zwei wichtigen Punkten unterscheidet. Zwar ermöglicht dieses Formelmodell weitergehende bauspartechnische Untersuchungen als die früheren Modelle, aber diese sind ebenfalls weitgehend auf den statischen oder dynamischen Beharrungszustand beschränkt.

Zur Realisierung der im letzten Abschnitt erläuterten Zielsetzung, Analyseinstrumente für kurz- und mittelfristige Untersuchungen über Bausparkollektive zu schaffen, die Veränderungen im Kollektiv berücksichtigen, kommen vor allem zwei Formen ökonomischer Modellbildung in Frage. Es handelt sich dabei um ökonometrische Modelle und Simulationsmodelle. Im Teil 4 dieser Arbeit wird ein Simulationsmodell in Form eines Schichtenmodells für Bausparkollektive vorgestellt. In 4.1 wird die Wahl dieses Modellansatzes ausführlich begründet und gegenüber Formelmodellen abgegrenzt. Im folgenden wird dargelegt, warum dieser Ansatz einem ökonometrischen Modell vorgezogen wurde. Ein großer Teil der bauspartechnischen Zusammenhänge läßt sich in Bilanzgleichungen fassen, die in ökonometrischen Modellen berücksichtigt werden können. Schwierigkeiten ergeben sich jedoch bei der Schätzung von Verhaltensgleichungen, die zur Beschreibung der Sparprozesse im Bausparkollektiv aufgenommen werden müssen. Bei entsprechenden Analysen stellte sich heraus, daß es außerordentlich schwierig ist, statistisch gesicherte Hypothesen über kollektive Sparprozesse und deren Disaggregation zu erhalten.

---

[1] vgl. Krahn, A., Technik ..., a.a.O..

[2] vgl. Laux, H., Grundzüge ..., a.a.O..

Teil 2

Definition der Modellparameter anhand des zeitlichen Ablaufs eines Bausparvertrages

2.1 Vertragsabschluß und Soforteinzahlung

Der Abschluß eines Bausparvertrags erfolgt über eine gewisse Summe, die *Bausparsumme* oder *Vertragssumme* VS . Diese Vertragssumme wird in allen folgenden Betrachtungen weggelassen, d.h. sie wird implizit als 1 angenommen. Alle berechneten absoluten Größen können durch einfache Multiplikation mit der gewünschten Vertragssumme dann auf eine konkrete Größenordnung skaliert werden. Mit Abschluß des Bausparvertrags wird eine *Abschlußgebühr* in Höhe von ABGEB Prozent der Bausparsumme fällig. Die gegenwärtig von den deutschen Bausparkassen verlangten Abschlußgebühren liegen je nach Bauspartarif bei 1% oder 1,6 % der Bausparsumme. Die fällige Abschlußgebühr wird in der Regel dem Bausparkonto belastet und mit den eingehenden Zahlungen verrechnet. Zahlt der Bausparer die Abschlußgebühr nicht sofort ein, so weist sein Bausparkonto zunächst negative Salden auf, für die die Bausparkassen jedoch meist keine Schuldzinsen berechnen.

Viele Bausparer zahlen bereits bei Vertragsabschluß einen größeren Betrag auf ihr Bausparkonto ein, um ihre Zuteilungsaussichten günstig zu beeinflussen. Eine solche *Soforteinzahlung* wird im Modell durch den Parameter SOFORT als Prozentsatz der Vertragssumme berücksichtigt. Sparer mit einer hohen Soforteinzahlung werden auch als *Schnellsparer* bezeichnet.

2.2 Die Sparphase

In den Allgemeinen Bedingungen für Bausparverträge (ABB) ist für jeden Tarif einer Bausparkasse ein monatlicher *Regelsparbeitrag* von SRATE Prozent der Bausparsumme festgelegt. Obwohl die Bausparkassen berechtigt sind, Bausparverträge zu kündigen, wenn die Regelsparraten über einen gewissen Zeitraum nicht erbracht werden, wird von diesem Kündigungsrecht in praxi kein Gebrauch gemacht. Das bedeutet für den Bausparer in der Praxis, daß er seinen Ansparvorgang weitestgehend selbst bestimmen kann. Der Regelsparbeitrag ist für ihn nicht bindend. Tatsächlich haben Kollektivanalysen bei Bausparkassen ergeben, daß bis zu 5 % der Bausparsummen eines Abschlußjahrgangs 10 Jahre lang überhaupt nicht bespart werden.

Die Höhe der Regelsparbeiträge variiert im derzeitigen Tarifgefüge der

deutschen Bausparkassen zwischen monatlich 0,3 % (Langzeittarife) und 0,11 % (Schnellspartarife).

Der Bausparer kann jederzeit zusätzlich zu seinen regelmäßigen Sparzahlungen Sonderzahlungen erbringen. Im Modell findet nur der besonders wichtige Spezialfall der *Einmaleinzahlung* vor der Zuteilung (Auffüllung, Zuzahlung) Berücksichtigung, der in Abschnitt 2.3.4 erklärt wird.

Das Bausparguthaben eines Bausparers wird jährlich mit dem Zinssatz *GUTZIN* verzinst. Er liegt traditionell bei 2,5 % oder 3 %. Seit einiger Zeit werden jedoch auch Langzeittarife, d.h. Tarife mit niedrigen Spar- und Tilgungsbeiträgen, angeboten, die eine Zinsoption zwischen 2,5 % und 4 % (bzw. 4,5 % bei der Leonberger Bausparkasse) ermöglichen. Die höhere Guthabenverzinsung wird dabei mit einem höheren Darlehenszins und/oder höheren Gebühren bei Zuteilung erkauft.

Technisch wird dieser Optionstarif so geführt, daß der *Zinszuschlag* oder *Bonus* in Höhe von *BONZIN* Prozent jährlich einem Sonderkonto gutgeschrieben wird. In die Berechnung der Bewertungsziffer (vgl. Abschnitt 2.3.3) geht der Zinszuschlag nicht ein. Der Sparer kann wählen, ob er den Bonus erhält und dann einen höheren Darlehenszins zu entrichten hat, oder nicht. Von besonderem Interesse ist diese Regelung für Sparer, die eventuell auf ihr Bauspardarlehen verzichten wollen. Sie können somit eine marktnähere Verzinsung ihrer Bausparguthaben erzielen. Dies war auch der Grund für die Einführung solcher Tarife. Denn als Folge reduzierter staatlicher Bausparförderung, die wesentlich zur Rendite des Sparvorgangs beigetragen hatte, ging der in hohem Maß erwünschte Anteil der Sparer, die kein Bauspardarlehen in Anspruch nehmen, stark zurück.

Die an jedem Jahresende anfallende *Bearbeitungsgebühr* (Kostenbeitrag, Kontoführungsgebühr) wird ebenfalls als ein Prozentsatz *VERGEB* der Bausparsumme berücksichtigt. In der Bausparpraxis ist die Bearbeitungsgebühr jedoch unabhängig von der Bausparsumme und beträgt je nach Bausparkasse zwischen 3,- DM und 10,- DM je Vertrag.

2.3 Die Zuteilung

2.3.1 Vertragliche Mindestbedingungen

Die Zuteilung eines Bausparvertrages kann erst erfolgen, wenn die vertraglichen Mindestbedingungen des jeweiligen Bauspartarifs erfüllt sind. Bei den meisten Bauspartarifen sind dies zwei Kriterien, nämlich die Mindestwartezeit $MINZEI$ und der Mindestanspargrad $MINANS$. Die Mindestwartezeit beträgt bei den meisten Bauspartarifen 18 Monate, bei den Langzeittarifen jedoch bis zu 60 Monaten. Der Mindestanspargrad beträgt bei den meisten Bausparkassen für die Standardtarife 40 % der Bausparsumme und 50 % für die seit Ende 1981 von vielen Instituten eingeführten Schnell- und Langzeittarife. Bei manchen Bauspartarifen gibt es noch eine dritte Mindestanforderung, die Mindestbewertungszahl. Das Konzept der Bewertungszahl wird in Abschnitt 2.3.3 erläutert. Die Mindestbewertungszahlen sind jedoch in den meisten Fällen überflüssig, da sie durch die beiden anderen Mindestbedingungen bereits impliziert werden.

2.3.2 Die Sparerleistung

Die Zuteilung der Bausparer erfolgt nach dem sogenannten Zeit-mal-Geld System [1)2)3)]. Diesem liegt die Idee zugrunde, denjenigen Bausparer als ersten zuzuteilen, der dem Bausparkollektiv während seiner bisherigen Sparphase die meiste Liquidität in Form seines Bausparguthabens zur Verfügung gestellt hat. Diese Liquidität heißt *Sparerleistung* und entspricht dem Integral unter der Sparkurve des Bausparers. Die Sparkurve $BSE(t)$ ist die Kurve, die die Bauspareinlage des Bausparers zu jedem Zeitpunkt wiedergibt.

[1)] vgl. Köpf, E., Zuteilungen und Wartezeiten — bausparmathematisch betrachtet, in: Der Volkswirt, Jg. 1958, Beilage zu Heft 43, S. 34.

[2)] vgl. Lehmann, W., Gründungsgeschichte und Systementwicklung der privaten Bausparkassen im Altreich, in: Lehmann, W. (Hrsg.), Beiträge zur Entwicklung des privaten Bausparwesens, Berlin 1940, S. 90.

[3)] vgl. Krahn, A. und Kaltenboeck, B., Das deutsche Bausparen, a.a.O., S. 52.

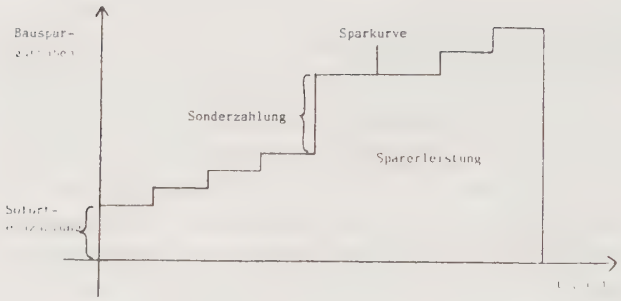

Abbildung 2.1: Sparkurve und Sparerleistung

Die Sparerleistung eines Bausparers zum Zeitpunkt t wird also durch folgende Gleichung definiert:

$$SL(t) = \int_0^t BSE(\tau)d\tau\,.$$

Da der Sparvorgang diskreter Natur ist, würde es zur Ermittlung der Sparerleistung auch ausreichen, eine gewichtete Summe aus den Bausparguthaben in den Zeitpunkten zu bilden, in denen eine Veränderung der Bauspareinlagen stattfindet, also eine Einzahlung, Zinsgutschrift oder Belastung mit der Bearbeitungsgebühr. Die Gewichte in dieser Summe sind die Liegezeiten der Bauspareinlagen in der jeweiligen Höhe:

$$SL_t = \sum_{i=1}^{\tau}(T_i - T_{i-1})BSE_{i-1}$$

wobei:

- T_i: Zeitpunkte der Änderungen des Bausparguthabens (in Jahren)
- $T_\tau = t$
- $BSE_i = BSE_{i-1} + Z_i$, für $i = 1,\ldots,\tau$
- Z_i: Änderungsbeträge im Zeitpunkt T_i, für $i = 1,\ldots,\tau$
- $BSE_0 = 0$.

In der Praxis würde es großen zusätzlichen Aufwand bedeuten, die Sparerleistung nach der beschriebenen Formel zu ermitteln, denn bei jedem Buchungsvorgang auf einem Bausparkonto müßte die Sparerleistung aktualisiert werden.

2.3.3 Bewertungsverfahren

Das "Sparverdienst" eines Bausparers kann mit einer Bewertungszahl gemessen werden. Alle praktizierten Bewertungsverfahren versuchen dabei, die tatsächliche Sparerleistung zu messen. Die Bewertungszahlen aller am Zuteilungsvorgang teilnehmenden Bausparer werden an den *Bewertungsstichtagen*, die in den *ABB* festgelegt sind, errechnet und der Höhe nach in eine Zuteilungsliste gebracht.

Um am Zuteilungsvorgang teilnehmen zu können, muß der Bausparvertrag zuteilungsreif sein, d.h. die vertraglichen Mindestbedingungen müssen erfüllt sein. Für die Ermittlung der am Zuteilungsvorgang teilnehmenden Sparer werden drei Verfahren unterschieden. Beim automatischen Verfahren nehmen alle zuteilungsreifen Verträge am Zuteilungsvorgang teil. Beim Befragungsverfahren werden die zuteilungsreifen Bausparer vor der Zuteilung befragt, ob sie eine Zuteilung annehmen würden. Nur dann nehmen sie am Zuteilungsvorgang teil. Beim Antragsverfahren muß der Bausparer die Zuteilung beantragen, bevor er in der Zuteilungsliste berücksichtigt wird [1].

Die verfügbaren Zuteilungsmittel werden den Bausparern mit den höchsten Bewertungszahlen zugeteilt. Die Bewertungszahl des letzten so zugeteilten Bausparers heißt *Zielbewertungszahl*. Die Anzahl der Bewertungsstichtage bzw. Zuteilungsperioden wird als Parameter *ZPER* im Formelmodell berücksichtigt.

2.3.3.1 Die Saldenmethode

Bei der Saldenmethode wird an den Bewertungsstichtagen das Bausparguthaben eines Bausparvertrages mit einem Faktor *SFAKT* multipliziert, zu einem Bruchteil *NFAKT* der Vertragssumme ins Verhältnis gesetzt und zur bisherigen Bewertungszahl addiert, um die neue Bewertungszahl zu erhalten. Die Bewertungszahl am t-ten Bewertungsstichtag beträgt also:

[1] vgl. Laux, H., Das kollektive Bausparen, a.a.O., S. 47f.

$$BWZ_t^S = \sum_{i=1}^{t} \frac{SFAKT \cdot BSE_i}{NFAKT} = \frac{SFAKT \cdot \sum_{i=1}^{t} BSE_i}{NFAKT} .$$

Der Term $\sum_{i=1}^{t} BSE_i$ unterscheidet sich von der Sparerleistung in zweierlei Hinsicht. Zum einen werden die Guthabensveränderungen zwischen den Stichtagen erst am folgenden Stichtag berücksichtigt. Die Liegezeit von Einzahlungen bis zu diesem Stichtag wird vernachlässigt. Für die Höhe der Bewertungszahl spielt es also keine Rolle, ob Einzahlungen kurz nach einem Stichtag oder kurz vor dem nächsten Stichtag vorgenommen werden. Zum anderen geht das Guthaben zum Stichtag selbst mit ein, obwohl es unter Umständen erst durch eine Einzahlung am Stichtag oder kurz davor seine jetzige Höhe erreicht hat. Dieses letzte mitgerechnete Guthaben hat dem Kollektiv noch nicht als Liquidität zur Verfügung gestanden und wird trotzdem mit als "Sparverdienst" bewertet.

Die Möglichkeit eines Sparers, sich aufgrund dieses Effektes durch Einzahlung eines größeren Betrages am Stichtag Reihenfolgevorteile bei der Zuteilung zu verschaffen, wird jedoch vielfach überschätzt [1]. Dies soll kurz an einem Beispiel erläutert werden. Für den Fall $NFAKT = 0.01$ $SFAKT = 1$ ist der Bewertungszahlenzuwachs an jedem Stichtag gerade der Anspargrad des Vertrages in Prozent. Bei halbjährlichen Stichtagen und einer Tilgungsrate von 0,6 % monatlich beträgt die Zielbewertungszahl, bei der sich in einem reinen Kollektiv aus 0,4%-Ratensparern der statische Beharrungszustand mit dem Anlegungsgrad 1 (Bauspareinlagen = Bauspardarlehen) einstellt, etwa 490. Eine hohe Sonderzahlung zum Bewertungsstichtag von 20 % der Vertragssumme erbringt mit 20 Bewertungspunkten also nur einen kleinen Beitrag zur Zielbewertungszahl.

2.3.3.2 Die Zinsmethode

Die Zinsmethode berechnet die Zielbewertungszahl als die Summe aller Guthabenzinsen, die für das Bausparkonto bis zum Stichtag entstehen, multipliziert mit einem Faktor $ZFAKT$ und dividiert durch einen Bruchteil $NFAKT$ der Vertragssumme:

[1] vgl. Gramer, W., Das Wartezeitproblem ..., a.a.O., S. 88.

$$BWZ_t^{\prime} = \frac{ZFAKT \cdot \sum_{i=1}^{t_\ell} \frac{GUTZIN}{SPER} \cdot BSE_{i-1}}{NFAKT} = \frac{\frac{ZFAKT \cdot GUTZIN}{SPER} \sum_{i=1}^{t_\ell} BSE_{i-1}}{NFAKT}$$

wobei $SPER$ Anzahl der Verzinsungsperioden pro Jahr

t_ℓ letzter Zinsberechnungstermin vor t.

Es ist dabei zu beachten, daß nicht über die Kapitalisierungstermine summiert wird, die in der Regel am Jahresende liegen, sondern über die Termine, an denen die Bausparkasse die am Jahresende gutzuschreibenden Zinsen für die abgelaufene Verzinsungsperiode berechnet. Bei der Festlegung der Verzinsungsperioden gibt es verschiedene Modelle[1]. Beim *Monatsmodell* ($SPER = 12$) werden die gutzuschreibenden Zinsen monatlich berechnet. In jedem Monat werden dabei alle Sparbeiträge berücksichtigt, die bis zum 15. des Vormonats eingegangen sind. Beim *Quartalsmodell* ($SPER = 4$) werden die Zinsen am Ende jedes Kalendervierteljahres berechnet. Berücksichtigt werden Spargelder, die bis zum Beginn des Quartals eingegangen sind. Das *Tertialsmodell* ($SPER = 3$) setzt an die Stelle des Kalendervierteljahres das Kalenderdritteljahr. Bei einigen Bausparkassen, die dieses Verzinsungsmodell benutzen, werden zusätzlich Einzahlungen ab einer gewissen Höhe (meist 1000,- DM) ab dem folgenden Monat mitverzinst.

Die nach der Zinsmethode berechnete Bewertungszahl hat einen engeren Zusammenhang mit der Sparerleistung als die Salden-Bewertungszahl, denn bei fast allen Bausparkassen ist die Zahl der Zinsberechnungstermine größer als die Zahl der Bewertungsstichtage. Außerdem werden Einzahlungen kurz vor dem Stichtag nicht mitberücksichtigt. Bei tageweiser Verzinsung der Bauspareinlagen wäre die Zins-Bewertungszahl zur Sparerleistung echt proportional.

2.3.3.3 Die Guthaben-Zins-Methode

Dieses von den öffentlichen Bausparkassen angewandte Verfahren bezieht in die Bewertungszahl neben der Zinssumme, die auch in der Zinsmethode benutzt wird, das Bausparguthaben mit ein. Andere Autoren [2] nennen diese Methode "Salden-Zinsmethode". Der hier verwandte Name ist bewußt unterschiedlich gewählt, da diese Bewertungsmethode nicht, wie der Name "Salden-Zinsmethode" suggeriert,

[1] vgl. Laux, H., Die Bausparfinanzierung, 2. Auflage, Heidelberg 1966, S. 23 f.

[2] vgl. Gramer, W., Das Wartezeitproblem ..., a.a.O., S. 90f.

eine Kombination der Saldenmethode und der Zinsmethode ist. Die Formel für die Bewertungszahl lautet:

$$BWZ_t^{GZ} = \frac{KFAKT \cdot BSE_t + ZFAKT \cdot ZINSSUM_t}{NFAKT}$$

wobei $$ZINSSUM_t = \frac{GUTZIN}{SPER} \cdot \sum_{i=1}^{t_t} BSE_{i-1}$$

Je nach Verhältnis von $KFAKT$ und $ZFAKT$ hat eine Einzahlung am Stichtag einen mehr oder weniger großen Einfluß auf die Bewertungszahl. Bei den gegenwärtigen Verhältnissen der öffentlichen Bausparkassen in den Standardtarifen ($KFAKT = 1, ZFAKT = 10$ bzw. $12, NFAKT = 0.004$) hat das Guthaben bei einem Anspargrad von 40% (50%) einen Anteil von 100 (125) Punkten an der Bewertungszahl. Jede weitere Einzahlung von einem Prozent der Vertragssumme bringt 2,5 Punkte. Bei einer zur mittleren Wartezeit führenden Zielbewertungszahl von etwa 300 ist die Möglichkeit der Einflußnahme durch Einzahlung am Stichtag also erheblich größer als bei der Saldenmethode. Im Unterschied zur Saldenmethode, wo die spezielle Wahl der Faktoren $SFAKT$ und $NFAKT$ *ausschließlich* die Höhe des Bewertungszahlenniveaus beeinflußt, bestimmt bei der Guthaben-Zins-Methode das Verhältnis von $KFAKT$ und $ZFAKT$ die Einflußnahmemöglichkeit des einzelnen Bausparers auf seine Zuteilungserwartung durch Sonderzahlungen an Bewertungsstichtagen.

2.3.3.4 Die verallgemeinerte Methode

Diese Berechnungsmethode für die Bewertungszahl kommt in der Bausparpraxis nicht vor. Sie wird hier lediglich eingeführt, um alle vorgestellten Bewertungsmethoden analytisch in einer Formel erfassen zu können. Dies hat den Vorteil, daß bei den Berechnungen im Formelmodell und im Simulationsmodell nicht nach der speziellen Bewertungsmethode unterschieden werden muß. Die verallgemeinerte Bewertungszahlenformel lautet:

$$BWZ_t = \frac{SFPER \cdot SS_t + KFAKT \cdot BSE_t + ZFAKT \cdot ZINSSUM_t}{NFAKT}$$

mit $$SFPER = SFAKT \frac{ZPER}{SPER}$$

$$SS_t = \sum_{i=1}^{t} BSE_i \text{ (Saldensumme)}$$

$ZPER$ Zahl der Bewertungsstichtage pro Jahr

Die Skalierung der Saldensumme mit $\frac{ZPER}{SPER}$ ist aus folgendem Grund notwendig. Die Saldensumme wird in den folgenden Modellen grundsätzlich auf Basis von *SPER* berechnet. Das heißt, daß z.B. bei monatlicher Zinsberechnung in der Sparphase die Saldensumme eines Jahres aus den zwölf Monatsendguthaben besteht. Die Anzahl der Bewertungsstichtage ist im allgemeinen jedoch geringer. Bei z.B. nur zwei Stichtagen im Jahr besteht die für die Bewertungszahl maßgebliche Saldensumme nur aus den Endguthaben der beiden Halbjahre, sie beträgt also etwa $\frac{2}{12} = \frac{ZPER}{SPER}$ der im Modell berechneten Saldensumme.

2.3.4 Einmaleinzahlung vor Zuteilung

Die in 2.3.3.3 beschriebene Möglichkeit für den Bausparer, seine Bewertungszahl durch Einzahlungen am Bewertungsstichtag zu erhöhen, wird durch die Größe *EINMAL* in den Modellen berücksichtigt. Tatsächlich ist die Definition jedoch noch etwas weitgehender. Durch die Größe *EINMAL* wird ein Prozentsatz der Vertragssumme festgelegt, zu dessen Zahlung an einem Stichtag der Bausparer bereit ist, wenn er dadurch die Zuteilung in der darauffolgenden Zuteilungsperiode erreichen kann. Diese Definition umfaßt zusätzlich zur Erhöhung der Bewertungszahl den Fall, daß der Bausparer am Stichtag die erforderliche Bewertungszahl bereits aufweist, sein Mindestsparguthaben jedoch noch nicht erreicht hat.

Der Teil der Einmaleinzahlung am Stichtag, mit dem der vertragliche Mindestanspargrad erreicht wird, heißt *Auffüllung*, der eventuell darüber hinausgehende Teil zur Erreichung der Zielbewertungszahl heißt *Zuzahlung*. Im Prinzip kennt der Sparer die Zielbewertungszahl im Zeitpunkt der Zuzahlung natürlich nicht, da sie noch gar nicht feststeht. In der Praxis wird sie von den Bausparkassen hingegen oft als vermutete Größe im vorhinein bekanntgegeben.

2.3.5 Darlehensvergabe

Hat ein Sparer am Bewertungsstichtag die Zielbewertungszahl nach der Zuteilungswartezeit *tz* erreicht, so wird er an einem Zuteilungstermin in der Zuteilungsperiode, die dem Bewertungsstichtag folgt, zugeteilt. Der Abruf

der Bausparguthaben erfolgt ebenfalls häufig sofort nach Zuteilung. Die vom Bewertungsstichtag bis zur Zuteilung vergehende Zeit wird deswegen *Guthabensruhezeit* genannt und im Modell mit dem Parameter GR berücksichtigt.

Der Bausparer braucht die Zuteilung natürlich nicht anzunehmen. Er kann seinen Bausparvertrag fortsetzen, solange die Auszahlung der Bausparsumme noch nicht begonnen hat. Dies sichert ihm das Recht zu, seinen Zuteilungsanspruch jederzeit mit einer gewissen Wartezeit wieder aufleben zu lassen, ohne erneut am Zuteilungsverfahren teilnehmen zu müssen. Bausparer, die ihr Bauspardarlehen nach Zuteilung überhaupt nicht in Anspruch nehmen, heißen Darlehensverzichter.

Das *Nettodarlehen* $NDAR$ des Bausparers ist der Unterschiedsbetrag zwischen seiner Bausparsumme und seinem Bausparguthaben:

$$NDAR = 1 - BSE_{tz+GR} .$$

Das Bruttodarlehen ergibt sich durch Aufschlag der Darlehensgebühr in Höhe von $DAMNUM$ Prozent und eines eventuellen Agios in Höhe von $AGIO$ Prozent des Nettodarlehens:

$$BDZ_0 = (1 + DAMNUN + AGIO)\, NDAR .$$

Das Damnum beträgt zur Zeit bei allen Bausparkassen und Tarifen 2% . Agien in Höhe von 2% bis 4% gibt es zur Zeit nur bei Schnelltarifen der öffentlichen und privaten Bausparkassen. Darlehensgebühr und Agio muß der Bausparer also nicht auf einmal entrichten, sondern sie werden seiner Darlehensschuld zugeschlagen.

Zur Auszahlung an den Bausparer gelangt das Nettodarlehen, das eventuell um ein Disagio von $DISAG$ Prozent des *Bruttodarlehens* gekürzt wird:

$$DARAUS = NDAR - DISAG \cdot BDZ_0 .$$

In der Bausparpraxis gibt es Disagien seit einigen Jahren. Sie sind für Bausparer unter Umständen von Interesse, da sie unter gewissen Voraussetzungen steuerlich als Geldbeschaffungskosten abgesetzt werden können. Je nach individuellen Einkommensverhältnissen kann sich der niedrige Darlehenszins, der als Folge eines Disagios zu entrichten ist, zusammen mit dem Disagio letztendlich günstiger oder ungünstiger auswirken als der ohne Disagio zu entrichtende Darlehenszins.

Die Auszahlung des Darlehens folgt der Guthabensauszahlung meist erst mit einem zeitlichen Verschub, da vor der Darlehensauszahlung Formalitäten wie

Beleihungsprüfung, grundbuchliche Sicherung und ähnliches erfüllt werden müssen. Außerdem wird das Darlehen nur schrittweise nach Baufortschritt ausgezahlt. Die Zeit zwischen Guthabens- und Darlehensauszahlung heißt *Darlehensruhezeit* und wird in den Modellen mit dem Parameter *DR* berücksichtigt.

2.4 Die Darlehensphase

2.4.1 Der grundsätzliche Ablauf der Darlehensphase

Nach Auszahlung des Bauspardarlehens hat der Bausparer bis zur Tilgung des Darlehens monatlich konstante Zins- und Tilgungsbeiträge in Höhe von *TRATE* Prozent der Vertragssumme zu erbringen. Diese Beiträge werden von der Bausparkasse in den Zinsanteil von *DARZIN* Prozent des maßgeblichen Restdarlehens und den Tilgungsanteil aufgespalten. Mit der Zeit wird also der Zinsanteil der Zins- und Tilgungsbeiträge immer geringer, da das Restdarlehen sinkt. Wie in der Sparphase wird das Bausparkonto auch in der Tilgungsphase am Jahresende mit dem konstanten Kostenbeitrag belastet, der in den Modellen jedoch als Prozentsatz der Vertragssumme behandelt wird. Das maßgebliche Restdarlehen ist in fast allen Bauspartarifen das Darlehen zu Beginn des jeweiligen Quartals. Zu diesen Zeitpunkten werden die Darlehenszinsen auch kapitalisiert, d.h. dem Bausparkonto belastet, im Gegensatz zu den Sparzinsen, die nur jährlich kapitalisiert werden. Diese Verzinsungsmodalitäten entsprechen also jeweils einmaligen Tilgungseingängen zum Ende jeden Quartals in Höhe der dreifachen monatlichen Regeltilgungsrate. Während die Bausparkassen Spareinzahlungen in beliebigem Rhythmus entgegennehmen und es dem Sparer so ermöglichen, die Nachteile des jeweiligen Verzinsungsmodells weitgehend auszugleichen, sind sie bei den Tilgungsbeiträgen weit restriktiver. Die meisten ABB sehen für den Fall rückständiger monatlicher Tilgungsraten Verzugszinsen vor.

2.4.2 Die Kassenleistung und der Belastungsgrad

Analog zur Sparphase heißt die Kurve $BDZ(t)$, die die Höhe des Darlehens zu jedem Zeitpunkt wiedergibt, *Darlehenskurve*. Die Fläche unter dieser Kurve bis zum Zeitpunkt der endgültigen Tilgung des Darlehens gibt das Kapital

des Bausparkollektivs an, das im Bauspardarlehen gebunden ist. Diese Fläche heißt Kassenleistung (KL). Die dadurch wiedergegebene Kapitalbindung ist die Gegenleistung des Bausparkollektivs an den Bausparer für das Kapital, das er dem Kollektiv während seiner Sparphase zur Verfügung gestellt hat.

Mit der Sparerleistung und der Kassenleistung stehen für die Sparphase und die Darlehensphase zwei vergleichbare Maßzahlen zur Verfügung, durch deren Vergleich eine Beurteilung der kumulierten Liquiditätswirkung ermöglicht wird. Als *Belastungsgrad* oder *Kassen-zu-Sparerleistung* wird der Quotient

$$KS = \frac{KL}{SL}$$

definiert. Der reziproke Wert SL/KL heißt *Leistungsgrad*. Moeller[1)] hat diese beiden Größen eingeführt und vorgeschlagen, die Zuteilung von Bausparverträgen an ihnen auszurichten.

Ein Belastungsgrad von über 1 signalisiert, daß die Liquiditätsleistung vom Kollektiv an den Bausparer größer ist als die von ihm erbrachte, während ein Belastungsgrad unter 1 den umgekehrten Sachverhalt anzeigt. Der Belastungsgrad gibt zusätzlich eine wichtige Kenngröße des statischen Beharrungszustandes eines Bausparkollektivs an, das ausschließlich aus dem betrachteten Sparertyp besteht. Es handelt sich hierbei um das Verhältnis von Bauspardarlehen und Bauspareinlagen, den *Anlegungsgrad* oder Anlagegrad (vgl. hierzu Abschnitt 3.2.1.4) $ANLEG = BDZ/BSE$.

2.4.3 Neuere Modelle der Darlehensabwicklung

Seit der Einführung neuer Bauspartarife gegen Ende 1981 gibt es für die Darlehensphase in einigen Tarifen zusätzliche Elemente. Bei einigen der Langzeittarife wurde eine *Stufentilgung* eingeführt. In den ersten $TDAU_1$ Quartalen nach Darlehenszahlung beträgt die monatliche Tilgungsrate $TRATE_1$ Prozent der Vertragssumme. In den folgenden $TDAU_2$ Quartalen steigt sie auf $TRATE_2$ Prozent. Dieser Prozeß setzt sich auf insgesamt $TILMAX$ Stufen fort. Die letzte dieser Stufen ist zeitlich unbegrenzt, sie reicht also bis zur endgültigen Tilgung des Bauspardarlehens. In der Praxis liegt $TILMAX$ bei 2 oder 3 Stufen. Die Dauer der

[1)] vgl. Moeller, E., Die bauspargerechte Zuteilung nach dem Belastungsgrad, in: Privates Bausparwesen 1952, Bonn, S. 51.

Stufen mit erniedrigter Tilgung liegt jeweils zwischen 3 und 5 Jahren. Ein typisches Beispiel ist etwa folgender Verlauf:

4 Jahre	monatlich 0,3%
4 Jahre	monatlich 0,4%
für den Rest der Laufzeit	monatlich 0,5% .

Der Grund für die Einführung von Stufentilgungen liegt darin, daß Bauspardarlehen etwa im Vergleich zu Hypothekendarlehen relativ hohe Tilgungsannuitäten aufweisen. Mit der Stufentilgung wird dem Darlehensnehmer zu Beginn der Darlehensphase eine vergleichbare Annuität geboten.

Eine weitere Neuerung bei einigen Bauspartarifen macht die zu erbringende Tilgungsrate abhängig von der Bewertungszahl, die im Zeitpunkt der Zuteilung erreicht wird: je höher die Bewertungszahl, umso niedriger die Tilgungsrate:

$$TRATE = \begin{cases} TRMAX & \text{falls } BWZ \geq BWZMAX \\ TRMAX - (TRMAX - TRMIN) \cdot \frac{BWZ - BWZMIN}{BWZMAX - BWZMIN} & \text{falls } BWZMIN < BWZ < BWZMAX \\ TRMIN & \text{falls } BWZ \leq BWZMIN \end{cases}$$

wobei

- $TRMIN$: Mindesttilgungsrate
- $TRMAX$: höchste Tilgungsrate
- BWZ : Bewertungsziffer bei Zuteilung
- $BWZMIN$: bei $BWZ \leq BWZMIN$ muß $TRMAX$ erbracht werden
- $BWZMAX$: bei $BWZ \geq BWZMAX$ wird $TRMIN$ erbracht

In den entsprechenden ABB ist nicht die angegebene Funktion spezifiziert, sondern die Tilgungsrate wird dort in Form von Tabellen festgelegt. Die Abhängigkeit der Tilgungsrate von der Bewertungszahl ist in der Praxis also nicht kontinuierlich, sondern intervallfix gewählt. Bewertungszahlabhängige Tilgungsraten wurden in Universaltarifen eingeführt, um innerhalb eines Tarifes schnelle Ansparverhalten mit hohen und langsames Ansparen mit niedrigen Tilgungsraten verknüpfen zu können. Dadurch können in solchen Universaltarifen Sparerschichten abgewickelt werden, die traditionell in verschiedenen Tarifen unterzubringen wären. Auf Gefahren dieser Konstruktion wird im Abschnitt 6.3 hingewiesen.

Das folgend beschriebene Merkmal tritt im Tarifgefüge der deutschen Bausparkassen bislang ausschließlich im Zusammenhang mit der bewertungszahlabhängigen Tilgungsrate auf. Die zu erbringenden Zins- und Tilgungsbeiträge steigen bei einigen dieser Tarife jährlich um einen Prozentsatz w. Die anhand der Tabelle bestimmte Rate ist dann die *Anfangstilgungsrate*. Zu jedem Jahresbeginn wird dann die monatlich zu erbringende Rate erhöht.

Teil 3

Das Formelmodell

In diesem Teil wird zunächst ein Formelwerk entwickelt, das es gestattet, die wichtigsten Kenngrößen eines einzelnen Bausparvertrags zu berechnen, die seine liquiditäts- und ertragsmäßigen Wirkungen auf ein Kollektiv wiedergeben. Unter anderem wird die Guthabens- und Darlehensentwicklung berechnet, Kassen- und Sparerleistung werden als Funktionen der elementaren Merkmale dargestellt und der Barwert der Abwicklung eines Bausparvertrages wird berechnet. Der hierbei betrachtete Zuteilungsmechanismus ist die Zuteilung nach Zielbewertungszahl.

Aufbauend auf den Formeln, die für die Abwicklung eines einzelnen Vertrages aufgegeben werden, wird erläutert, wie die Bestimmung von Kollektivkenngrößen hieraus möglich ist. Dabei wird auch ein eventuelles Wachstum des Neugeschäfts berücksichtigt. Neben der Zuteilung mit einer Zielbewertungszahl ist es hier auch möglich, eine verallgemeinerte Kassengleichung zu erfüllen.

Von großem Interesse für die Praxis ist die Möglichkeit, die Effekte von Änderungen in den Tarifbedingungen zu studieren. Dies kann mit dem Formelmodell in zweifacher Weise getan werden. Für konkrete Änderungen in einer bestimmten Situation bietet sich die komparativ-statische Betrachtung an: Einsetzen von gegenwärtigen Daten und geänderten Daten in die Formeln erzeugt Werte, durch deren Vergleich die Effekte offenkundig werden. Allgemeiner können diese Effekte durch Differentiation der Bestimmungsgleichungen nach den infrage stehenden Parametern ermittelt werden. Dies liefert wiederum Formeln, aus denen sichtbar wird, wie die Konstellation der übrigen Tarifmerkmale die Effekte beeinflußt.

Die Periodisierung des Formelmodells ist variabel gehalten, so daß die in der Bausparmathematik übliche Quartalsbetrachtung als Spezialfall erfaßt ist. Im Modell werden drei Periodisierungsvariablen benutzt:

SPER Anzahl der Perioden pro Jahr während der Sparphase
ZPER Anzahl der Bewertungsstichtage pro Jahr
DPER Anzahl der Perioden pro Jahr während der Darlehensphase.

Setzt man diese drei Variablen auf 4, so erhält man die übliche Quartalsbetrachtung. Mit $SPER = 12$, $ZPER = 2$, $DPER = 4$, ergibt sich der in der Praxis häufig vorkommende Fall mit monatlicher Berechnung der Sparzinsen, quartalsweiser Darlehensverzinsung und zwei Bewertungsstichtagen im Jahr.

3.1 Die formelmäßige Erfassung eines einzelnen Bausparvertrages

3.1.1 Die Sparphase

3.1.1.1 Die Behandlung der Abschlußgebühr

Die Abschlußgebühr wird in keinem der existierenden mathematischen Modelle des Bausparens berücksichtigt. Begründet wird dies mit zwei Argumenten[1]

- Zum einen dient die Abschlußgebühr zur Deckung von Kosten, die unmittelbar mit dem Abschluß des Bausparvertrages verbunden sind. Den größten Anteil hieran hat die Vermittlerprovision, die je nach Bausparkasse, Tarif und Status des Vermittlers zwischen 0,1 % und 1 % der Bausparsumme liegt. Die Höhe der Vermittlerprovision dient häufig zur Steuerung der Neugeschäftsqualität. Durch unterschiedliche Provisionen für verschiedene Tarife und Abschläge für gewisse kollektivschädliche Verträge, insbesondere Soforteinzahler, wird der Außendienst der Bausparkassen veranlaßt, vornehmlich die erwünschten Verträge abzuschließen.
- Zum anderen wird die fällige Abschlußgebühr mit den ersten Sparzahlungen des Bausparers verrechnet. Erst nach Bezahlung der Abschlußgebühr wird ein Bausparguthaben auf dem Bausparkonto ausgewiesen. Für die zum Soll gestellte Abschlußgebühr werden jedoch keine Sollzinsen berechnet. Daher kann man den Bausparvertrag so behandeln, als sei er erst zu dem Zeitpunkt abgeschlossen worden,an dem die Abschlußgebühr abgezahlt ist.

Bereits im heutigen Tarifgefüge der deutschen Bausparkassen ist die Abschlußgebühr nicht mehr einheitlich. Einige private Bausparkassen erheben für den 2,5 % / 4,5 % - Tarif (d.h. 2,5 % Guthabenzins, 4,5% Darlehenszins), der seit Mitte der 70'er Jahre bei allen Bausparkassen als zweiter Standardtarif neben dem 3% / 5% - Tarif eingeführt ist, eine Abschlußgebühr von 1,6% der Bausparsumme gegenüber 1% im 3% / 5% - Tarif. Diese Differenzierung ist sicher nicht mit höheren Abschlußkosten zu begründen. Beim Abschluß eines Bausparvertrages im 2,5 % / 4,5% - Tarif erhalten diese Bausparkassen also einen höheren Kostendeckungsbeitrag als beim Abschluß eines Vertrages mit der gleichen Bausparsumme im 3% / 5% - Tarif. Auch die Überlegungen bei einigen

[1] vgl. z.B. Laux, H., Grundzüge der Bausparmathematik, a.a.O., S. 8.

Bausparkassen, den Sparern, die kein Darlehen in Anspruch nehmen, auf irgendeine Weise die Abschlußgebühr zu erlassen, zeigen, daß diese Gebühr für die Bausparkassen ein wichtiges absatzpolitisches Instrument ist. Voraussetzung für den Einsatz dieses Instruments ist jedoch, daß dessen Wirkungen auf die Liquiditäts- und Ertragslage der Bausparkasse berechnet werden können.

Auch das Argument, der Bausparvertrag könne wegen der Verrechnung der Abschlußgebühr mit den ersten Sparzahlungen behandelt werden, als sei er erst bei Abzahlung der Abschlußgebühr abgeschlossen, stimmt nur teilweise. Nur äußerst selten kommt es in der Praxis vor, daß die Abschlußgebühr durch die ersten Sparzahlungen exakt bezahlt wird. Geht man von den Regelsparbeiträgen der gängigen Bauspartarife aus, so ist es nie der Fall. Der Normalfall sieht so aus, daß in irgendeinem Monat (bei den Standardtarifen mit einer Sparrate von 0,4 – 0,42 ‰ ist es der dritte) der Sparbeitrag in zwei Teile gespalten wird. Der erste dient der Zahlung des verbliebenen Restes des Abschlußgeühr, der zweite wird als Guthaben auf dem Bausparkonto gebucht. Im allgemeinen stimmt also die erste gutgeschriebene Sparzahlung nicht mit dem sonst regelmäßigen Sparbeitrag überein. Dieser Effekt kann bei Vernachlässigung der Abschlußgebühr nicht abgebildet werden.

Aus den oben genannten Gründen wird die Abschlußgebühr hier berücksichtigt. Technisch wird dies so realisiert, daß die Abschlußgebühr zunächst von der Soforteinzahlung abgezogen wird:

$$SOFABG = SOFORT - ABGEB\ .$$

Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden:

a) $SOFABG \geq 0$, d.h. die Soforteinzahlung reicht zur Deckung der Abschlußgebühr aus. In diesem Fall kann mit der Soforteinzahlung $SOFABG$ gerechnet werden.

b) $SOFABG < 0$, d.h. zur Bezahlung der Abschlußgebühr müssen die ersten Sparbeiträge herangezogen werden.

Um diese beiden Fälle in einer Formel berücksichtigen zu können, wird $SOFABG$ folgendermaßen zerlegt:

$$SOFABG = SOFABG^{+} - SOFABG^{-}$$

mit

$$SOFABG^{+} = \max\{SOFABG, 0\}$$
$$SOFABG^{-} = -\min\{SOFABG, 0\}.$$

Das bewirkt gerade, daß je nach Vorzeichen von $SOFABG$ eine der Variablen $SOFABG^{+}$ oder $SOFABG^{-}$ den Wert $|SOFABG|$ hat. Die jeweils andere Variable hat den Wert 0. $SOFABG^{+}$ kann nun also als die tatsächliche Soforteinzahlung behandelt werden, während $SOFABG^{-}$ der Teil der Abschlußgebühr ist, der mit den ersten Sparraten zu verrechnen ist.

Die Anzahl k der Perioden bis zur Abzahlung der Abschlußgebühr ergibt sich als:

$$k = \lceil \frac{SOFABG^{-}}{SR} \rceil .$$

SR bezeichnet dabei den Sparbeitrag in jeder zugrundegelegten Zeitperiode:

$$SR = \frac{12}{SPER} \cdot SRATE .$$

Bei der Quartalsbetrachtung ($SPER = 4$) ist SR also das Dreifache des monatlichen Sparbeitrags $SRATE$.

Der Betrag R, der dem Bausparkonto am Ende des k-ten Zeitabschnitts gutgeschrieben wird, ist dann

$$R = k \cdot SR - SOFABG^{-} . \qquad (3.0)$$

3.1.1.2 Die Verzinsung der Bausparguthaben

3.1.1.2.1 Die Verzinsung in der Bausparpraxis

Die Verzinsung eines Sparbeitrages, der zu einem beliebigen Zeitpunkt geleistet wird, erfolgt in der Bausparpraxis so, daß die je nach Verzinsungsmodell der Bausparkasse (vgl. 2.3.3.2) verschiedene Zahl von Teilperioden des Jahres ermittelt wird, für die der Betrag zu verzinsen ist (Liegezeit). Liegt ein Betrag nur einen Teil des Jahres auf dem Bausparkonto, so wird der entsprechende Bruchteil der Jahreszinsen, die sich bei dem anzuwendenden Guthabenzinssatz für diesen Betrag ergibt, gutgeschrieben. Wird eine Sparrate z.B. ab dem 5. Monat eines Jahres verzinst, so ist sie mit Zins und Zinseszins z.B. nach 63 Monaten auf

mit

$a = (1 + \frac{7}{12} GUTZIN)$	Verzinsung für 7 Monate im ersten Jahr
$b = (1 + GUTZIN)^4$	Verzinsung für 4 Kalenderjahre
$c = (1 + \frac{8}{12} GUTZIN)$	Verzinsung für 8 Monate im letzten Jahr

angewachsen. Dabei ist zu beachten, daß die anteiligen Zinsen für das letzte Jahr noch nicht kapitalisiert sind, d.h. sie sind dem Bausparkonto noch nicht gutgeschrieben. Dies geschieht erst am Jahresende oder bei Auszahlung des Bausparguthabens.

Eine formelmäßige Berücksichtigung dieses exakten Verzinsungsmodus ist durchaus möglich. Die Formeln würden dadurch jedoch sehr unübersichtlich, wie die folgende Herleitung der Berechnungsformel für das Bausparguthaben mit diesem Verzinsungsmodus zeigt. Dabei sind hier nur die regelmäßigen Sparraten, jedoch weder Soforteinzahlungen, Abschlußgebühr, Einmaleinzahlungen, noch die Bearbeitungsgebühr berücksichtigt. Außerdem müßten dann jeweils zwei Guthabensbestände berechnet werden, denn bei der Berechnung der individuellen Bewertungsziffer werden die noch nicht kapitalisierten Zinsen des letzten Jahres nicht zum Bausparguthaben hinzugerechnet, bei der Auszahlung des Guthabens und der Berechnung des Nettodarlehens werden sie jedoch berücksichtigt.

Der Wert $W_{t,a}$, auf den eine Einzahlung SR in der Periode a ($\Rightarrow$ Verzinsungsbeginn in $a+1$) in der Periode t angewachsen ist, berechnet sich als:

$$W_{t,a} = SR \cdot (1 + GUTZIN \frac{SPER - ((a-1) \bmod SPER + 1)}{SPER}) \tag{3.1}$$

$$\cdot (1 + GUTZIN)^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor - \lceil \frac{a}{SPER} \rceil} \tag{3.2}$$

$$\cdot (1 + GUTZIN \cdot \frac{t \bmod SPER}{SPER}). \tag{3.3}$$

Dabei ist $x \bmod y$ ("x modulo y") der Rest, der bei der Division x/y bleibt:

$$x \bmod y := x - y \cdot \lfloor \frac{x}{y} \rfloor .$$

Term (3.1) verzinst bis zum Ende des Kalenderjahres, in dem die Einzahlung erfolgt. Term (3.2) stellt die Verzinsung für die vollen Kalenderjahre dar, die bis zum

Zeitpunkt t vergangen sind und Term (3.3) verzinst für den bereits abgelaufenen Teil des Jahres, in dem t liegt.

Diese Formel stimmt jedoch nur dann exakt, wenn zwischen a und t ein Jahreswechsel liegt. Ist dies nicht der Fall, so gilt:

$$W'_{t,a} = SR \cdot (1 + GUTZIN \frac{t-a}{SPER}).$$

Das Bausparguthaben eines Sparers in Periode t, der in der Periode a seinen Vertrag abschließt und ab diesem Zeitpunkt regelmäßig die Sparrate SR einzahlt, ist die Summe der bis zum Zeitpunkt t verzinsten Sparzahlungen:

$$BSE_{t,a} = \sum_{i=a}^{SPER\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor} W_{t,i} \tag{3.4}$$

$$+ \sum_{i=SPER\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor + 1}^{t} W'_{t,i} \tag{3.5}$$

$SPER\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor$ ist der letzte Jahreswechsel vor t und wird im folgenden mit JW bezeichnet. Die Auswertung von (3.5) ergibt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=SPER\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor + 1}^{t} W'_{t,i} \\
&= \sum_{i=1}^{t\,mod\,SPER} W'_{t\,mod\,SPER,\,i} \\
&= \sum_{i=1}^{t\,mod\,SPER} SR(1 + GUTZIN \frac{t\,mod\,SPER - i}{SPER}) \\
&= SR\,[t\,mod\,SPER + \frac{GUTZIN}{SPER}((t\,mod\,SPER)^2 - \sum_{i=1}^{t\,mod\,SPER} i)] \\
&= SR\,[t\,mod\,SPER + \frac{GUTZIN}{SPER}((t\,mod\,SPER)^2 - \frac{t\,mod\,SPER(t\,mod\,SPER+1)}{2})] \\
&= SR \cdot t\,mod\,SPER\,(1 + \frac{GUTZIN(t\,mod\,SPER - 1)}{SPER \cdot 2}).
\end{aligned}$$

Die Auswertung von (3.4) ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=a}^{SPER\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor} W_{t,i} \\
&= \sum_{i=a}^{JW} \Big[SR \Big(1 + GUTZIN \frac{SPER - (i-1) \bmod SPER + 1)}{SPER}\Big) \\
&\quad \cdot (1+GUTZIN)^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor - \lceil \frac{i}{SPER} \rceil} \cdot \Big(1 + GUTZIN \frac{t \bmod SPER}{SPER}\Big) \Big] \\
&= SR \cdot \Big(1 + GUTZIN \frac{t \bmod SPER}{SPER}\Big) (1+GUTZIN)^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor} \qquad (3.6) \\
&\quad \cdot \sum_{i=a}^{JW} 1 + \frac{GUTZIN}{SPER} \cdot \frac{SPER - ((i-1) \bmod SPER + 1)}{(1+GUTZIN)^{\lceil \frac{i}{SPER} \rceil}} \; .
\end{aligned}
$$

Der Nenner in der Summe ist wegen der Aufrundung für je $SPER$ aufeinanderfolgende Summenglieder konstant. Dies wird im folgenden Rechenschritt ausgenutzt:

$$
\begin{aligned}
&(3.4) = \\
&(3.6) \cdot \Big[\frac{1}{(1+GUTZIN)^{\lceil \frac{a}{SPER} \rceil}} \sum_{i=a}^{SPER \lceil \frac{a}{SPER} \rceil} \Big(1 + GUTZIN \frac{SPER - ((i-1) \bmod SPER + 1)}{SPER}\Big) \\
&\quad + \sum_{j=\lceil \frac{a}{SPER} \rceil + 1}^{\lfloor \frac{JW}{SPER} \rfloor} \frac{1}{(1+GUTZIN)^j} \sum_{i=1}^{SPER} \Big(1 + GUTZIN \frac{SPER - (i-1+1)}{SPER}\Big) \Big] \\
&= (3.6) \cdot \Big[- \frac{1}{(1+GUTZIN)^{\lceil \frac{a}{SPER} \rceil}} \sum_{i=(a-1) \bmod SPER + 1}^{SPER} \Big(1 + GUTZIN \frac{SPER - (i-1+1)}{SPER}\Big) \\
&\quad + \sum_{j=\lceil \frac{a}{SPER} \rceil + 1}^{\lceil \frac{i}{SPER} \rceil} \frac{1}{(1+GUTZIN)^j} \Big(SPER + GUTZIN \Big(SPER - \frac{1}{SPER} \sum_{i=1}^{SPER} i\Big)\Big) \Big]
\end{aligned}
$$

$$= (3.6)\cdot\Big[\frac{1}{(1+GUTZIN)^{\lceil \frac{1}{SPER}\rceil}}\cdot\Big(SPER-(a-1)\bmod SPER$$

$$+GUTZIN\Big(SPER-(a-1)\bmod SPER-\frac{1}{SPER}\sum_{i=(a-1)\bmod SPER+1}^{SPER} i\Big)\Big)$$

$$+\sum_{j=\lceil \frac{1}{SPER}\rceil+1}^{\lfloor \frac{1}{SPER}\rfloor}\frac{1}{(1+GUTZIN)^j}\Big(SPER+GUTZIN\Big(SPER-\frac{SPER(SPER+1)}{SPER\cdot 2}\Big)\Big)\Big]$$

$$= (3.6)\cdot\Big[\frac{1}{(1+GUTZIN)^{\lceil \frac{1}{SPER}\rceil}}\Big((SPER-(a-1)\bmod SPER)(1+GUTZIN)$$

$$-\Big(GUTZIN\Big(\frac{SPER(SPER+1)}{SPER\cdot 2}-\frac{(a-1)\bmod SPER\cdot((a-1)\bmod SPER+1)}{SPER\cdot 2}\Big)\Big)$$

$$+\sum_{j=\lceil \frac{1}{SPER}\rceil+1}^{\lfloor \frac{1}{SPER}\rfloor}\frac{1}{(1+GUTZIN)^j}\Big(SPER(1+GUTZIN)-GUTZIN\frac{SPER+1}{2}\Big)\Big]$$

$$= (3.6)\cdot\Big[\Big((SPER-(a-1)\bmod SPER)(1+GUTZIN)-GUTZIN$$

$$\cdot\Big(\frac{SPER+1}{2}-\frac{(a-1)\bmod SPER((a-1)\bmod SPER+1)}{2\cdot SPER}\Big)\Big)\frac{1}{(1+GUTZIN)^{\lceil \frac{1}{SPER}\rceil}}$$

$$+\Big(SPER(1+GUTZIN)-GUTZIN\frac{SPER+1}{2}\Big)$$

$$\frac{(\frac{1}{1+GUTZIN})^{(\lfloor \frac{1}{SPER}\rfloor+1)}-(\frac{1}{1+GUTZIN})^{(\lceil \frac{1}{SPER}\rceil+1)}}{\frac{1}{1+GUTZIN}-1}\Big].$$

Somit ergibt sich die folgende exakte Gesamtformel für das Bausparguthaben:

$$
\begin{aligned}
BSE_{t,a} = \quad & \qquad (3.7)\\
& SR[(1+GUTZIN\frac{t \bmod SPER}{SPER})(1+GUTZIN)^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor}\\
& \cdot [((SPER-(a-1) \bmod SPER)(1+GUTZIN)\\
& \quad -(\frac{SPER+1}{2}-\frac{(a-1) \bmod SPER((a-1) \bmod SPER+1)}{2 \cdot SPER})\frac{GUTZIN}{(1+GUTZIN)^{\lceil \frac{a}{SPER} \rceil}}\\
& \quad +(SPER(1+GUTZIN)-GUTZIN\frac{SPER+1}{2})\\
& \quad \cdot \frac{1+GUTZIN}{GUTZIN} \cdot ((\frac{1}{1+GUTZIN})^{(\lceil \frac{a}{SPER} \rceil+1)}-(\frac{1}{1+GUTZIN})^{(\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor+1)})]\\
& \quad + t \bmod SPER(1+\frac{GUTZIN(t \bmod SPER-1)}{2 \cdot SPER})] .
\end{aligned}
$$

$BSE_{t,a}$ gibt das Bausparguthaben in der Periode t einschließlich der noch nicht kapitalisierten Zinsen für das laufende Jahr an. Dieser Wert stimmt also nicht mit dem Kontostand des Bausparers überein, sondern repräsentiert die Guthabenshöhe, die bei Kündigung oder Zuteilung zur Auszahlung käme. Den jeweiligen Kontostand erhält man, wenn in (3.7) der Term $t \bmod SPER$, der gerade die Verzinsung für das laufende Jahr bewirkt, durch Null ersetzt wird.

Für weitere Berechnungen ist diese Formel offensichtlich zu unhandlich. Zudem ist auch diese Formel nur richtig, wenn zwischen a und t ein Jahreswechsel liegt. Liegen t und a im selben Kalenderjahr, so gilt:

$$
\begin{aligned}
BSE'_{t,a} = \sum_{i=a}^{t} W'_{t,i} = \sum_{i=a}^{t} SR(1+GUTZIN\frac{t-i}{SPER}) \qquad (3.8)\\
= SR[t-a+1+\frac{GUTZIN}{SPER}((t-a+1)t-\sum_{i=a}^{t} i)]\\
= SR[t-a+1+\frac{GUTZIN}{SPER}((t-a+1)t-(\frac{t(t+1)}{2}-\frac{a(a-1)}{2}))]\\
= SR[t-a+1+\frac{GUTZIN}{2 \cdot SPER}((t-2a+1)t+a(a-1))] .
\end{aligned}
$$

Die Gültigkeit dieser Formeln ist selbstverständlich nicht auf das Bausparen beschränkt, sondern sie gelten für jeden regelmäßigen Sparprozeß, der den gleichen Verzinsungsbedingungen unterliegt. Explizit sind dies:

- Verzinsungsbeginn für eine Einzahlung ist der Beginn der nächsten Zeitperiode nach der Einzahlung (je nach Wahl von *SPER* sind also das echte Monatsmodell, das Quartalsmodell und das Tertialsmodell mit abgedeckt).
- Die Zinsen eines Kalenderjahres werden erst am Jahresende kapitalisiert.

3.1.1.2.2 **Die Verzinsung im Formelmodell**

Guthabenszinsen werden in der Bausparmathematik wie auch allgemein in der Finanzmathematik periodenmäßig berechnet und kapitalisiert. Die übliche Periode in der Bausparmathematik ist das Quartal. Der Grund für diese modellmäßige Vereinfachung liegt in der Kompliziertheit der Formeln, wenn man die Kapitalisierung erst zum Jahresende berücksichtigen will (vgl. Formel (3.7)).

Laux realisiert die quartalsmäßige Verzinsung in seinem bausparmathematischen Gesamtmodell, indem er ein Viertel des Jahreszinssatzes als Quartalszinssatz benutzt[1)2)] und die Zinsen in dieser Höhe zum Quartalsende kapitalisiert. Das heißt, es werden Zinseszinsen ab dem nächsten Quartal vergütet. Somit entspricht die Jahresverzinsung nicht dem tariflichen Zinssatz. Ein Guthaben G_0 zu Jahresbeginn wächst ohne weitere Einzahlung mit diesem Verzinsungsmodus bis zum Ende des Jahres allgemein auf

$$G_1 = G_0 \left(1 + \frac{GUTZIN}{SPER}\right)^{SPER} \qquad \text{an.}$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung

$$(1+x)^n > 1 + nx \qquad \text{für } n \geq 2,\ x > 0$$

folgt mit $x = \frac{GUTZIN}{SPER}$, $n = SPER$ sofort

$$\left(1 + \frac{GUTZIN}{SPER}\right)^{SPER} > 1 + GUTZIN \quad \text{für } SPER \geq 2\,.$$

Die tarifliche Guthabenverzinsung mit $(1 + GUTZIN)$ jährlich wird also überschätzt. Laux nimmt dies bewußt in Kauf mit dem Argument, die Unterschiede zwischen

1) vgl. Laux, H., Das kollektive Bausparen, a.a.O., S. 274.

2) vgl. Laux, H., Grundzüge der Bausparmathematik, a.a.O., S.16.

seinem bausparmathematischen Gesamtmodell und der Bausparwirklichkeit seien an anderer Stelle (z.B. Neugeschäftsentwicklung) so groß, daß diese unwesentliche Abweichung keine Rolle spiele[1]. Es ist richtig, daß die Abweichung gering ist, denn die vierteljährliche Kapitalisierung von 0,75 % Zins entspricht einer Jahresverzinsung von $(1.0075^4 - 1)$ oder 3.034 % gegenüber 3 % bei korrekter Verzinsung. Da diese Abweichungen aber leicht vermeidbar sind und obendrein bei vergleichenden Analysen zu Fehlschlüssen führen können, wird hier ein anderer Weg beschritten. Zwar werden die Zinsen auch am Ende jeder Periode (Quartal, Monat ...) kapitalisiert, jedoch wird der Perioden-Zinssatz so gewählt, daß die Jahresverzinsung mit der tariflichen übereinstimmt. Die Periodenverzinsung muß also mit einem Faktor g erfolgen, so daß gilt:

$$g^{SPER} = 1 + GUTZIN\,.$$

Dies wird gerade durch die Wahl von

$$g = (1 + GUTZIN)^{\frac{1}{SPER}} \tag{3.9}$$

erreicht. In der folgenden Graphik ist die zeitliche Entwicklung des Wertes eines Guthabens, das ohne weitere Einzahlung verzinst wird, unter verschiedenen Verzinsungsannahmen dargestellt.

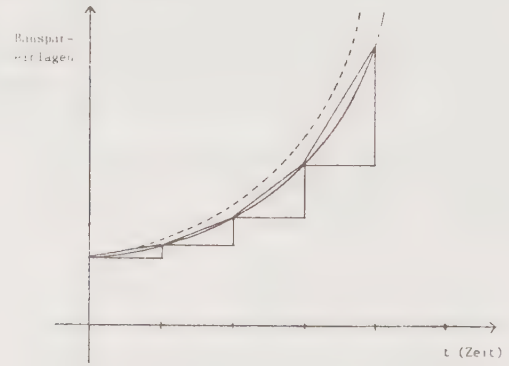

Abbildung 3.I: Verschiedene Verzinsungsmodi

Der jeweilige Kontenstand entspricht der Treppenfunktion: jeweils am Jahresende werden die Guthabenzinsen gutgeschrieben. Die stückweise lineare

[1] vgl. Laux, H., Grundzüge der Bausparmathematik, a.a.O., S. 16.

Funktion, die sich durch Verbindung der Jahresendwerte ergibt, entspricht dem Wert des Guthabens bei Auszahlung. Hier sind also die noch nicht kapitalisierten Zinsen des jeweiligen Jahres miteingerechnet. Die Verbindung der Jahresendwerte durch eine Exponentialfunktion ist der Verlauf, der sich durch die hier benutzte Verzinsung mit dem Faktor g aus (3.9) ergibt. Die jeweiligen Jahresendwerte stimmen mit der tatsächlichen Verzinsung überein. Nur die unterjährigen Werte des Guthabens werden jeweils geringfügig unterschätzt. Die zweite Exponentialkurve stellt den Verzinsungsverlauf im Laux'schen Modell dar. Am Ende des ersten Quartals stimmt ihr Wert mit der tatsächlichen Verzinsung überein. Ab dann liegt sie jedoch permanent über dem Wert des Guthabens. Mit zunehmender Zeit wird auch der Abstand zwischen dem wirklichen Wert und der Laux'schen Approximation immer größer.

3.1.1.3 Die Berechnungsformeln für das Bausparguthaben und die Zinssumme

Da die Zinsen im vorliegenden Modell am Ende jeder Periode kapitalisiert werden, macht es im Gegensatz zur tatsächlichen Entwicklung der Bauspareinlagen keinen Unterschied, ob eine Spareinzahlung im ersten Quartal eines Jahres oder in einem anderen Quartal geleistet wird. Die Unterschiede in der Verzinsung von Einzahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten im Jahr rühren in der Praxis gerade von der nur jährlichen Kapitalisierung her. Die Höhe des Bausparguthabens im Formelmodell ist also nur noch von der Zeit seit Vertragsbeginn abhängig, nicht mehr vom absoluten Zeitpunkt des Vertragsbeginns.

In das Bausparguthaben gehen mehrere Komponenten ein:

a) Soforteinzahlung und Abschlußgebühr

b) regelmäßige Sparraten

c) Bearbeitungsgebühr

d) Einmaleinzahlung vor Zuteilung

a) Der Wert von Abschlußgebühr und Soforteinzahlung in der Periode t ist:

$$W_t^{SOFABG} = SOFABG^+ \cdot g^{t-1} + R \cdot g^{t-k} \tag{3.10}$$

Falls die Soforteinzahlung höher ist als die Abschlußgebühr ($SOFABG^+ > 0$), wird der Überschuß $t-1$ Perioden verzinst. Reicht die Soforteinzahlung nicht zur Deckung der Abschlußgebühr, so wird der nicht für die

Abschlußgebühr verbrauchte Rest R der Sparrate in der k-ten Periode $t-k$ Perioden verzinst.

b) Die regelmäßigen Sparraten gehen erst ab der Periode $(k+1)$ in das Guthaben ein, da sie vorher zur Deckung der Abschlußgebühr verwendet werden. Der Wert einer Einzahlung SR aus der i-ten Periode $(i > k)$ in der Periode t ist:

$$W_{t,i}^{SR} = SR \cdot g^{t-i}.$$

Die Summe der verzinsten Regelraten beträgt dann:

$$\begin{aligned} W_t^{SR} &= \sum_{i=k+1}^{t} W_{t,i}^{SR} = \sum_{i=k+1}^{t} SR \cdot g^{t-i} = SR \sum_{i=0}^{t-k-1} g^i \\ &= SR \cdot \frac{g^{t-k}-1}{g-1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

c) Die Bearbeitungsgebühr in Höhe von $VERGEB$ fällt jährlich an, und zwar unabhängig von der Einlösung der Abschlußgebühr. Es gilt also:

$$\begin{aligned} W_t^{VERGEB} &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor} VERGEB\,(1+GUTZIN)^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor - i} \\ &= VERGEB \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor - 1} (1+GUTZIN)^i \\ &= VERGEB \frac{(1+GUTZIN)^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor} - 1}{1+GUTZIN-1} \\ &= VERGEB \frac{(1+GUTZIN)^{\lfloor \frac{t}{SPER} \rfloor} - 1}{GUTZIN}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Wegen der geringen Höhe und Bedeutung der Bearbeitungsgebühr wird im Formelmodell zur Vereinfachung unterstellt, daß die Bearbeitungsgebühr $VERGEB$ anteilig von der regelmäßigen Sparrate SR einbehalten wird. Der Jahresendwert eines regelmäßig von den Sparbeiträgen einbehaltenen

Betrages V ist:

$$\sum_{i=1}^{SPER} V \cdot g^{SPER-i} = V \sum_{i=0}^{SPER-1} g^i$$
$$= V \frac{g^{SPER}-1}{g-1} = V \frac{GUTZIN}{g-1}.$$

Damit die regelmäßige Einbehaltung der jährlichen Gebühr $VERGEB$ entspricht, muß also gelten:

$$V \frac{GUTZIN}{g-1} = VERGEB$$
$$\Leftrightarrow \qquad V = VERGEB \frac{g-1}{GUTZIN}.$$

Im folgenden wird also die Bearbeitungsgebühr $VERGEB$ aus den Berechnungen weggelassen, dafür aber mit der korrigierten regelmäßigen Sparrate

$$SRV = SR - V = SR - VERGEB \frac{g-1}{GUTZIN}$$

gerechnet.

d) Die Einmaleinzahlung am Bewertungsstichtag geht in das Guthaben bei Zuteilung einfach additiv ein. Sie dient der Erreichung der Zielbewertungszahl (vgl. Abschnitt 2.3.4).

Somit stellt sich das Bausparguthaben eines einzelnen Vertrages in der t-ten Periode seit Vertragsabschluß auf:

$$BSE_t^S = w_t^{SRV} + w_t^{SOFABG} + EIN \tag{3.13}$$
$$= SRV \frac{g^{t-k}-1}{g-1} + SOFABG + g^{t-1} + R \cdot g^{t-k} + EIN$$
$$= g^{t-k}\left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG + g^{k-1} + R\right) - \frac{SRV}{g-1} + EIN.$$

Dabei gilt:

$$EIN = \begin{cases} EINMAL & \text{falls Zuteilung in Periode } t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Summe $ZINS_t^S$ aller bis zum Zeitpunkt t gutgeschriebenen Zinsen errechnet sich am leichtesten als Differenz zwischen dem Guthaben in der Periode t und der Summe

aller bisher geleisteten Einzahlungen, vermehrt um die Gebühren, die während der Sparphase bereits aus dem Guthaben entnommen wurden:

$$ZINS_t^S = BSE_t^S - (t \cdot SR + SOFORT + EIN) + (t \cdot V + ABGEB) \tag{3.14}$$

$$= BSE_t^S - t \cdot SRV - SOFABG - EIN$$

$$= SRV\left(\frac{g^{t-k} - 1}{g - 1} - t\right) + SOFABG^{+} \cdot g^{t-1} + R \cdot g^{t-k} - SOFABG\,.$$

3.1.1.4 Die Sparerleistung und die Saldensumme

Die Sparerleistung und die Saldesumme (vgl. Abschnitt 2.3.2) werden durch die Summen aller positiven Guthabensalden seit Vertragsabschluß wiedergegeben. Da im Formelmodell unterstellt wird, daß die Einzahlungen in Periodenabständen erfolgen, sind die Zeitgewichtsfaktoren für die jeweiligen Guthabenssalden alle gleich $\frac{1}{SPER}$. Die Sparerleistung der Periode t ist also mit der Saldensumme in der Periode t bis auf den Faktor $\frac{1}{SPER}$ identisch, falls man davon ausgeht, daß die Einzahlungen jeweils zu Periodenbeginn erfolgen. Werden die Spareinzahlungen zum Periodenende getätigt, so darf das Guthaben des letzten Zeitabschnitts nicht in die Sparerleistung eingerechnet werden, da es erst im Zeitpunkt der Messung entstanden ist (vgl. Abschnitt 2.3.2). Bei Einzahlungen am Periodenanfang gilt also für die Sparerleistung SL_t^A und die Saldensumme SS_t:

$$SL_t^A = \frac{1}{SPER} SS_t\,. \tag{3.15}$$

Bei Einzahlungen am Periodenende gilt für die Sparerleistung SL_t^E:

$$SL_t^E = \frac{1}{SPER} SS_{t-1}\,. \tag{3.16}$$

Solange durch die Sparraten die Abschlußgebühr gezahlt wird, gilt der Vertrag als "nicht eingelöst". Der Saldo wird solange als Null angenommen, d.h. die Summierung beginnt erst mit der k-ten Periode, in der das Guthaben gerade R beträgt.

Solange ein Bausparvertrag regelmäßig bespart wird, gilt dann:

$$SS_t^S = \sum_{i=k}^{t} BSE_i^S \tag{3.17}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{t} [SRV \frac{g^{i-k}-1}{g-1} + SOFABG^+ g^{i-1} R \cdot g^{i-k}] + EIN + R$$

$$= \frac{SRV}{g-1} \sum_{i=1}^{t-k} (g^i - 1) + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} \sum_{i=1}^{t-k} g^i + R \sum_{i=1}^{t-k} g^i + EIN + R$$

$$= \frac{g^{t+k-1}-g}{g-1} (\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R) - \frac{SRV(t-k)}{g-1} + EIN + R .$$

3.1.1.5 Guthaben und Saldensumme bei Beendigung des Sparprozesses

Wenn ein Bausparvertrag ab einem Zeitpunkt t nicht mehr bespart wird, so ändert sich sein Guthaben nur noch durch die Verzinsung. Es gilt dann:

$$BSE_{t+i}^{SW} = BSE_t^S \cdot g^i . \tag{3.18}$$

Für die Saldensumme während der Zeit $t+1, \ldots, t+l$ gilt somit:

$$SSN_l^S = \sum_{i=1}^{l} BSE_t^S \cdot g^i = BSE_t^S \sum_{i=1}^{l} g^i \tag{3.19}$$

$$= BSE_t^S \frac{g^{l+1}-g}{g-1}$$

Diese Formel gibt auch für $l = 0$ den richtigen Wert 0 an.

Dieses Verhalten von Bausparern (Einstellung der regelmäßigen Sparzahlungen) tritt in der Bausparpraxis aus verschiedenen Gründen häufig auf. Zum einen kann es vorkommen, daß Bausparer wegen irgendwelcher finanzieller Probleme nicht mehr in der Lage oder gewillt sind, weitere Einzahlungen auf den Bausparvertrag zu leisten. Dieser Fall ist in der Regel von bausparfremden Erwägungen bestimmt und tritt zu unbestimmten Zeitpunkten während der Sparphase auf. Daher kann er als untypisch gelten und wird hier nicht behandelt.

Zwei andere Gründe für die Einstellung von regelmäßigen Zahlungen sind dem Bausparen jedoch systemimmanent und sollen deswegen hier auch berücksichtigt werden. Es handelt sich dabei zum einen um die Einstellung der Sparraten ab dem Bewertungsstichtag vor Zuteilung und zum anderen um die Einstellung bei Erreichen der vertraglichen Mindestansparung.

Sobald ein Bausparer weiß, daß sein Vertrag zugeteilt wird, wird er in der Regel keine Sparbeiträge mehr erbringen, da er dadurch nur noch seinen Darlehensanspruch verkürzt. Die meisten Bausparkassen nehmen ihre Zuteilungen in Monats- oder Zweimonatsintervallen vor. Da es oft jedoch nur zwei Bewertungsstichtage gibt, unterliegen fast alle Bausparer einem zeitlichen Verschub zwischen dem Zeitpunkt, an dem sie von ihrer bevorstehenden Zuteilung Kenntnis erhalten (Bewertungsstichtag) und der tatsächlichen Zuteilung. In dieser Zeit ruht das Guthaben noch bei der Bausparkasse und wird weiterhin verzinst. Spareinzahlungen erfolgen meist jedoch nicht mehr. Diese Zeit zwischen Bewertungsstichtag und Guthabensauszahlung, die fast immer sofort bei Zuteilung erfolgt, heißt Guthabensruhezeit und wird im Modell mit dem Parameter GR berücksichtigt. Für das Bausparguthaben bei Zuteilung nach dem Bewertungsstichtag in der Periode t ergibt sich unter Verwendung von (3.16) und (3.13) also:

$$BSE^{SW}_{t+GR} = BSE^{S}_{t} \cdot g^{GR} \tag{3.20}$$

$$= g^{GR}\,[EINMAL + SRV\frac{g^{t-k}-1}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{t-1} + R \cdot g^{t-k}]\,.$$

Für die Saldensumme bei Zuteilung gilt entsprechend (unter Verwendung von (3.13), (3.17), (3.19)):

$$SS^{SW}_{t+GR} = SS^{S}_{t} + SSN^{S}_{GR} \tag{3.21}$$

$$= \frac{g^{t-k+1}-g}{g-1}\left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R\right)$$

$$- \frac{SRV(t-k)}{g-1} + EINMAL + R$$

$$+ \left(\frac{g^{GR+1}-g}{g-1}\right)\left[g^{t-k}\left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R\right) - \frac{SRV}{g-1} + EINMAL\right]$$

$$= \left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R\right)\frac{g^{t-k+GR+1}-g}{g-1}$$

$$- \frac{SRV}{g-1}\left(t-k+\frac{g^{GR+1}-g}{g-1}\right)$$

$$+ EINMAL\,\frac{g^{GR+1}-1}{g-1} + R\,.$$

Ein Vergleich mit (3.17) zeigt, daß (3.17) in (3.21) als Spezialfall mit $GR = 0$ enthalten ist.

GR kann immer nur einen Mittelwert des zeitlichen Verschubs über die Sparer einer Zuteilungsperiode darstellen, denn die unterschiedlichen Guthabensruhezeiten dienen ja gerade zur Verstetigung der Geldausgänge durch Zuteilung. Eine wie im Modell unterstellte einheitliche Ruhezeit für alle Sparer würde dies jedoch nicht gewährleisten. Der liquiditätsentlastende Effekt für die Bausparkasse wird jedoch hinreichend gut durch die Wahl eines durchschnittlichen Verschubes GR abgebildet. Je nach Konstellation von Bewertungsstichtagen und Zuteilungsterminen liegt der Durchschnittswert bei den verschiedenen Bausparkassen zwischen 0 und 3 Quartalen.

Der zweite systembedingte Grund für die Einstellung regelmäßiger Sparraten vor der Zuteilung hängt mit dem tariflichen Mindestanspargrad zusammen. Ein großer Teil der Bausparer stellt mit Erreichen des Mindestanspargrades seine Sparzahlungen ein, da jede weitere Einzahlung den Darlehensanspruch an die Bausparkasse kürzt. Für die Erhaltung eines möglichst hohen Darlehensanspruchs werden auch oft längere Wartezeiten bis zur Zuteilung infolge der nun langsamer wachsenden Bewertungszahl in Kauf genommen. Teilweise wird die Besparung von Verträgen auch schon vor Erreichen der Mindestansparung beendet, da die Guthabenszinsen, die dem Bausparguthaben in der ohnehin noch zu durchlaufenden Wartezeit zugeschlagen werden, den Anspargrad ebenfalls erhöhen. Ist die Zielbewertungszahl erreicht, kann durch eine Einmaleinzahlung der eventuell zur Mindestansparung noch fehlende Betrag eingezahlt werden und dadurch die Zuteilung erlangt werden.

Die Bausparguthaben eines Sparers, der seine Sparzahlungen zum Zeitpunkt tm einstellt, ist aus (3.18) bereits bekannt:

$$BSE^{SW}_{tm+i} = BSE^{S}_{tm} \cdot g^{i} . \tag{3.18}$$

Falls in der Periode i die Zuteilung erfolgt, ist noch die Einmaleinzahlung vor Zuteilung $EINMAL$ hinzuzurechnen. Hier soll nun der Zeitpunkt tm so bestimmt werden, daß das Bausparguthaben den Wert $MINANS$ erreicht hat:

$$\begin{aligned} & BSE^{S}_{tm} = MINANS \\ \Leftrightarrow\ & MINANS = SRV \frac{g^{tm-k} - 1}{g - 1} + SOFABG^{+} \cdot g^{tm-1} + R \cdot g^{tm-k} . \end{aligned}$$

Die Einmaleinzahlung ist hier natürlich nicht miteinbezogen, da sie erst bei Zuteilung und nicht schon bei Erreichen des Mindestanspargrades geleistet wird.

Auflösung dieser Gleichung nach tm ergibt:

$$MINANS = g^{tm} \cdot g^{-k}\left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R\right) - \frac{SRV}{g-1}$$

$$\log(g^{tm}) = \log\left(\frac{g^{k}\left(MINANS + \frac{SRV}{g-1}\right)}{\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R}\right)$$

$$tm = \frac{1}{\log g} \cdot \log\left(\frac{g^{k}\left(MINANS + \frac{SRV}{g-1}\right)}{\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R}\right). \tag{3.22}$$

Die Saldensumme eines Bausparvertrages, der ab dem Zeitpunkt tm keine Sparraten mehr erbringt und in der Periode $tm + i$ zugeteilt wird, ergibt sich durch Ersetzen von tm für t und i für GR in Formel (3.21). In Abweichung zu (3.21) muß jedoch berücksichtigt werden, daß die Einmaleinzahlung vor Zuteilung in die Saldensumme nur mit dem Faktor 1 statt

$$\frac{g^{GR+1} - 1}{g - 1}$$

eingeht, denn sie wird erst im Zeitpunkt $tm + i$ geleistet, nicht bereits bei Erreichen des Mindestanspargrades.

3.1.2 Die Zuteilung nach Zielbewertungszahl

Der in der Bausparpraxis verwendete Zuteilungsmodus ist die Zuteilung nach Zielbewertungszahl. Die Bausparkasse geht dabei so vor, daß sie eine Liste der zuteilungsreifen Bausparverträge nach Höhe der am Stichtag erreichten Bewertungzahlen geordnet erstellt. Nun werden die für die Zuteilung zur Verfügung stehenden liquiden Mittel (Zuteilungsmasse) solange den Verträgen mit den jeweils höchsten Bewertungszahlen zugewiesen, bis sie vergeben sind. Die Bewertungszahl des Vertrages, der als letzter Mittel zugewiesen erhält, heißt Zielbewertungszahl. In der folgenden Zuteilungsperiode werden alle Verträge, die am Stichtag die Zielbewertungszahl erreicht hatten, zugeteilt. Falls alle zugeteilten Sparer die Zuteilung annehmen würden, eräbe sich in der folgenden Periode ein Anlegungsgrad von 100 % . Alle liquiden Mittel des Bausparkollektivs wären in Bausaprdarlehen gebunden. In der Regel ist dies jedoch nicht der Fall. Durch Darlehensverzichte und Vertragsfortsetzungen bleibt ein mehr oder weniger großer Teil der Zuteilungsmasse unausgeschöpft.

Dieser Regelfall der Zuteilung der Bausparer nach Zielbewertungszahl soll hier formelmäßig erfaßt werden. Unter Vorgabe einer Zielbewertungszahl *BWZIEL* wird die Wartezeit berechnet, die ein Bausparer bis zur Zuteilung durchlaufen muß. Der zweite, eher hypothetische Zuteilungsmechanismus kann erst behandelt werden, nachdem die Berechnungsformeln für die Spar- und Darlehensphase entwickelt wurden. Es handelt sich dabei um die Erfüllung einer verallgemeinerten Kassengleichung, d.h. der Anlegungsgrad des Bausparkollektivs wird vorgegeben und daraus die Wartezeit der Bausparer und die Zielbewertungszahl berechnet.

3.1.2.1 Der Fall regelmäßiger Sparraten bis zur Zuteilung

3.1.2.1.1 Die Bestimmungsgleichung für die Wartezeit bis zur Zuteilung

Damit die Bewertungszahl des Bausparers die Zielbewertungszahl erreicht, muß folgende Gleichung erfüllt sein:

$$BWZIEL = \frac{SFPER \cdot SS_t^S + KFAKT \cdot BSE_t^S + ZFAKT \cdot ZINS_t^S}{NFAKT} \tag{3.23}$$

Durch Lösen dieser Gleichung nach t erhält man die Zeit, nach der ein regelmäßig mit der Rate SR sparender Bausparer die Zielbewertungszahl *BWZIEL* erreicht.

Durch Einsetzen von (3.13), (3.14) und (3.17) in (3.23) erält man die folgende Bestimmungsgleichung für die Wartezeit bis zur Zuteilung:

$$\begin{aligned} &NKAFKT \cdot BWZIEL = \\ &SFPER\,[\frac{g^{t-k+1}-g}{g-1}(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R) \\ &\qquad - \frac{SRV(t-k)}{g-1} + EINMAL + R] \\ &+KFAKT\,[SRV\frac{g^{t-k}-1}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{t-1} + R \cdot g^{t-k} + EINMAL] \\ &+ZFAKT\,[SRV(\frac{g^{t-k}-1}{g-1} - t) + SOFABG^{+} \cdot g^{t-1} + R \cdot g^{t-k} - SOFABG] \end{aligned} \tag{3.24}$$

Multiplikation von (3.24) mit $(g-1)$ und gleichzeitige Elimination von *EINMAL* und *SOFABG* auf der rechten Seite der Gleichung ergibt:

Es wird hierfür also unterstellt, daß Ein- und Auszahlungen kontinuierlich erfolgen und Zuteilungen nicht mehr nur zu den Periodenenden, sondern zu beliebigen Zeitpunkten vorgenommen werden. Aus Gründen der logischen Aneinanderreihung werden die genauen Details dieser Version erst im Abschnitt 3.2.1.6 beschrieben. Als Ergebnis dieser Erläuterungen wird hier vorweggenommen, daß alle für die Sparphase entwickelten Formeln ohne Veränderung einer stetigen Interpretation genügen. Sie sind also nicht nur für ganzzahlige, sondern auch für gebrochene Werte der Wartezeit t sinnvoll und richtig.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß die Wartezeit bis zur Zuteilung nicht explizit als Funktion der Tarifmerkmale und Parameter für das Sparerverhalten angegeben werden kann. Diese Funktion ist vielmehr implizit durch die Gleichung (3.26) definiert. Nach dem Satz über implizite Funktionen[1] erhält man die Ableitung einer Funktion $y(x)$, die implizit durch die Funktion $f(x,y)=0$ definiert ist, unter gewissen Voraussetzungen, die hier erfüllt sind, als

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{3.28}$$

Die Funktion $f(SRV, SOFABG^{+}, \ldots, t)$ ist hier die rechte Seite der Gleichung (3.26). Die Formeln, die im folgenden für die Ableitungen der Wartezeit nach bestimmten Größen berechnet werden, sind zum größten Teil mathematisch so kompliziert, daß sie in der Regel nicht global interpretiert werden können. Sie ermöglichen jedoch Einsichten in die Systematik der induzierten Veränderungen der Wartezeiten, während die Methode der komparativen Statik nur fallspezifische und somit auf die konkreten Umstände zugeschnittene Aussagen erlaubt.

Die Ableitung der Wartezeit nach der Sparrate SRV ist folgendermaßen zu berechnen:

$$\frac{\partial t}{\partial SRV} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial SRV}}{\frac{\partial f}{\partial t}}. \tag{3.29}$$

[1] vgl. z.B. Luenberger, D.G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Reading-Menlo Park-London-Don Mills 1973, S. 330f.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g^t \cdot \log g \cdot [(SFPER + \frac{g-1}{g}(KFAKT + ZFAKT)) \cdot \frac{1}{g^{k-1}} \tag{3.30}$$

$$\cdot (\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R)]$$

$$- SRV[SFPER + ZFAKT(g-1)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial SRV} = g^{t-k+1}(SFPER + \frac{g-1}{g}(KFAKT + ZFAKT)) \cdot \frac{1}{g-1} \tag{3.31}$$

$$- t(SFPER + (g-1)ZFAKT) - SFPER\frac{g}{g-1}$$

$$- (KFAKT + ZFAKT - SFPER \cdot k)$$

$$= g^{t-k+1}(\frac{SFPER}{g-1} + \frac{KFAKT + ZFAKT}{g})$$

$$- t(SFPER + (g-1)ZFAKT)$$

$$- (KFAKT + ZFAKT) + SFPER(k - \frac{g}{g-1}).$$

Die sich ergebende Ableitung der Wartezeit bis zur Zuteilung nach der Sparrate gemäß Formel (3.29) ist wiederum so komplex, daß eine globale einfache Interpretation kaum möglich ist. Zudem ist die Ableitung vom Niveau der Sparrate und der Wartezeit selbst abhängig. Aus diesem Grund werden hier nur einige typische Beispiele dargestellt, an denen die grundlegenden Effekte dieser Ableitung deutlich werden:

	1 Guthaben- Zins- Verfahren	2 Salden- Methode	3 Zins- Verfahren
SPER	4	4	4
ZPER	2	2	2
SFAKT	0	1	0
SFPER	0	0.5	0
KFAKT	1	0	0
ZFAKT	10	0	1
NFAKT	0.004	1	0.001
ABGEB	0.01	0.01	0.01
EINMAL	0	0	0
VERGEB	0	0	0

Tabelle 3.II

Für die drei Bewertungsmethoden werden jeweils vier Fälle betrachtet:

	Hochzinstarif		Niedrigzinstarif	
	Ratensparer a)	Sofort-einzahler b)	Ratensparer c)	Sofort-einzahler d)
GUTZIN	0.03	0.03	0.025	0.025
SRATE	0.012	0	0.012	0
SOFORT	0	0.4	0	0.4

Tabelle 3.III

Insgesamt werden also 12 verschiedene Situationen untersucht. Als Vergleichsbasis wird angenommen, daß die Zuteilung in allen Fällen jeweils mit der Zielbewertungszahl erfolgt, bei der im Zuteilungszeitpunkt ein Anspargrad von 42% erreicht ist. Dies entspricht einer sehr günstigen Geschäftssituation, der viele Bausparkassen bis vor 5 - 10 Jahren permanent unterlagen. Die dazu jeweils nötige Zielbewertungszahl wird selbst gar nicht benötigt, da sie in den Ableitungen (3.30) und (3.31) nicht vorkommt.

Die zum 42%-Anspargrad gehörigen Wartezeiten wurden aus Formel (3.22) berechnet und zusammen mit den nach (3.29) - (3.31) berechneten Ableitungen der Wartezeit nach der Sparrate in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Fall	Bewertungs-verfahren	Tarif	Sparverhalten	Wartezeit bis zur Zuteilung	
1a)		3 / 5	Rate	32.065	-1409.5
1b)	Guthaben-Zins-	3 / 5	Soforteinz.	11.029	-458.2
1c)	Verfahren	2.5/4.5	Rate	32.611	-1468.2
1d)		2.5/4.5	Soforteinz.	13.005	-646.7
2a)		3 / 5	Rate	32.065	-1270.2
2b)	Salden-	3 / 5	Soforteinz.	11.029	-161.3
2c)	Methode	2.5/4.5	Rate	32.611	-1300.0
2d)		2.5/4.5	Soforteinz.	13.005	-221.6
3a)		3 / 5	Rate	32.065	-959.4
3b)	Zins-	3 / 5	Soforteinz.	11.029	-135.1
3c)	Verfahren	2.5/4.5	Rate	32.611	-934.9
3d)		2.5/4.5	Soforteinz.	13.005	-190.7

Tabelle 3.IV: Wartezeiten von Ratensparern und Soforteinzahlern bis zur Zuteilung bei einem Anspargrad von 42 %.

Die Wartezeiten für die Fälle a) – d) sind natürlich bei allen drei Bewertungsverfahren gleich, da die Erreichung eines bestimmten Anspargrades unabhängig von der Bewertung des Bausparvertrages ist.

Bei der Tabelle sind zwei grundsätzliche Effekte zu beachten:

- Die Ableitung $\frac{\partial t}{\partial SRV}$ gibt für die betrachteten Sparertypen a) – d) jeweils an, wie sich die Wartezeit bis zur Zuteilung ändert, die in der Ausgangssituation bei einem Anspargrad von 42% erfolgt, wenn der gesamte Sparprozeß mit einer "marginal veränderten" Sparrate SRV durchgeführt wird. Da diese Ableitungen vom Niveau der Sparrate abhängig sind, gelten die in der Tabelle zusammengestellten Größen nur für eine geringfügige Abweichung der regelmäßigen Sparrate vom zugrundeliegenden Wert von 0,4% monatlich beim Ratensparer bzw. für eine vom Soforteinzahler zusätzlich erbrachte geringe regelmäßige Sparleistung.

- Der Anspargrad ändert sich durch die geänderte Sparrate ebenfalls, denn Gleichung (3.26) beschreibt die Zuteilung nach einer Zielbewertungszahl. Die jeweils notwendige Zielbewertungszahl, bei der gerade der Anspargrad von 42% erreicht wird, geht in die Berechnung der Ableitung $\frac{\partial t}{\partial SRV}$ zwar nicht ein. Die vorgenommene Analyse unterstellt jedoch, daß die Zuteilung weiterhin mit eben dieser Zielbewertungszahl erfolgt. Bei gleicher Zielbewertungszahl und veränderter Sparrate ändert sich der Anspargrad bei Zuteilung in der Regel.

Die Größenordnung der Ableitungen $\frac{\partial t}{\partial SRV}$ erklärt sich aus einer Dimensionsbetrachtung. Die Ableitung gibt die Veränderung der Wartezeit in Quartalen an, die sich bei einer Änderung der Sparrate SRV um eine "marginale" Einheit ergäbe. Die Einheit der Sparrate ist aber die gesamte Vertragssumme. Das bedeutet für eine Erhöhung der Sparrate um ein Promill der Vertragssumme im Quartal (beim Ratensparer also von 0,012 auf 0,013) eine plausible Verringerung der Wartezeit um 0,14 (Fall 3b) bis 1,4 (Fall 1c) Quartale.

Folgende grundsätzliche Tendenzen kommen in Tabelle 3.IV zum Ausdruck:

a) Die Wirkung einer Ratenerhöhung beim Ratensparer ist erheblich größer als die einer Aufnahme regelmäßiger Sparraten durch den Soforteinzahler. Bei der Guthaben Zins-Methode beträgt die Wirkung der Ratenerhöhung

Für die drei Bewertungsmethoden werden jeweils vier Fälle betrachtet:

	Hochzinstarif		Niedrigzinstarif	
	Ratensparer a)	Sofort-einzahler b)	Ratensparer c)	Sofort-einzahler d)
GUTZIN	0.03	0.03	0.025	0.025
SRATE	0.012	0	0.012	0
SOFORT	0	0.4	0	0.4

Tabelle 3.III

Insgesamt werden also 12 verschiedene Situationen untersucht. Als Vergleichsbasis wird angenommen, daß die Zuteilung in allen Fällen jeweils mit der Zielbewertungszahl erfolgt, bei der im Zuteilungszeitpunkt ein Anspargrad von 42% erreicht ist. Dies entspricht einer sehr günstigen Geschäftssituation, der viele Bausparkassen bis vor 5 - 10 Jahren permanent unterlagen. Die dazu jeweils nötige Zielbewertungszahl wird selbst gar nicht benötigt, da sie in den Ableitungen (3.30) und (3.31) nicht vorkommt.

Die zum 42%-Anspargrad gehörigen Wartezeiten wurden aus Formel (3.22) berechnet und zusammen mit den nach (3.29) - (3.31) berechneten Ableitungen der Wartezeit nach der Sparrate in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Fall	Bewertungs-verfahren	Tarif	Sparverhalten	Wartezeit bis zur Zuteilung	
1a)		3 / 5	Rate	32.065	-1409.5
1b)	Guthaben-Zins-	3 / 5	Soforteinz.	11.029	-458.2
1c)	Verfahren	2.5/4.5	Rate	32.611	-1468.2
1d)		2.5/4.5	Soforteinz.	13.005	-646.7
2a)		3 / 5	Rate	32.065	-1270.2
2b)	Salden-	3 / 5	Soforteinz.	11.029	-161.3
2c)	Methode	2.5/4.5	Rate	32.611	-1300.0
2d)		2.5/4.5	Soforteinz.	13.005	-221.6
3a)		3 / 5	Rate	32.065	-959.4
3b)	Zins-	3 / 5	Soforteinz.	11.029	-135.1
3c)	Verfahren	2.5/4.5	Rate	32.611	-934.9
3d)		2.5/4.5	Soforteinz.	13.005	-190.7

Tabelle 3.IV: Wartezeiten von Ratensparern und Soforteinzahlern bis zur Zuteilung bei einem Anspargrad von 42 %.

Die Wartezeiten für die Fälle a) – d) sind natürlich bei allen drei Bewertungsverfahren gleich, da die Erreichung eines bestimmten Anspargrades unabhängig von der Bewertung des Bausparvertrages ist.

Bei der Tabelle sind zwei grundsätzliche Effekte zu beachten:

- Die Ableitung $\frac{\partial t}{\partial SRV}$ gibt für die betrachteten Sparertypen a) – d) jeweils an, wie sich die Wartezeit bis zur Zuteilung ändert, die in der Ausgangssituation bei einem Anspargrad von 42% erfolgt, wenn der gesamte Sparprozeß mit einer "marginal veränderten" Sparrate SRV durchgeführt wird. Da diese Ableitungen vom Niveau der Sparrate abhängig sind, gelten die in der Tabelle zusammengestellten Größen nur für eine geringfügige Abweichung der regelmäßigen Sparrate vom zugrundeliegenden Wert von 0,4% monatlich beim Ratensparer bzw. für eine vom Soforteinzahler zusätzlich erbrachte geringe regelmäßige Sparleistung.

- Der Anspargrad ändert sich durch die geänderte Sparrate ebenfalls, denn Gleichung (3.26) beschreibt die Zuteilung nach einer Zielbewertungszahl. Die jeweils notwendige Zielbewertungszahl, bei der gerade der Anspargrad von 42% erreicht wird, geht in die Berechnung der Ableitung $\frac{\partial t}{\partial SRV}$ zwar nicht ein. Die vorgenommene Analyse unterstellt jedoch, daß die Zuteilung weiterhin mit eben dieser Zielbewertungszahl erfolgt. Bei gleicher Zielbewertungszahl und veränderter Sparrate ändert sich der Anspargrad bei Zuteilung in der Regel.

Die Größenordnung der Ableitungen $\frac{\partial t}{\partial SRV}$ erklärt sich aus einer Dimensionsbetrachtung. Die Ableitung gibt die Veränderung der Wartezeit in Quartalen an, die sich bei einer Änderung der Sparrate SRV um eine "marginale" Einheit ergäbe. Die Einheit der Sparrate ist aber die gesamte Vertragssumme. Das bedeutet für eine Erhöhung der Sparrate um ein Promill der Vertragssumme im Quartal (beim Ratensparer also von 0,012 auf 0,013) eine plausible Verringerung der Wartezeit um 0,14 (Fall 3b) bis 1,4 (Fall 1c) Quartale.

Folgende grundsätzliche Tendenzen kommen in Tabelle 3.IV zum Ausdruck:

a) Die Wirkung einer Ratenerhöhung beim Ratensparer ist erheblich größer als die einer Aufnahme regelmäßiger Sparraten durch den Soforteinzahler. Bei der Guthaben-Zins-Methode beträgt die Wirkung der Ratenerhöhung

beim Ratensparer etwa das 2,3-fache (Niedrigzinstarif) bzw. das 3,1-fache (Hochzinstarif) wie beim Soforteinzahler. Im Zinsverfahren sind diese Verhältnisse noch erheblich größer: 4,9 für den Niedrigzinstarif und 7,1 für den Hochzinstarif. Bei der Saldensummen-Methode ist der Wirkungsunterschied zwischen Ratensparer und Soforteinzahler mit 5,9 bzw. 7,9 am stärksten. Der Hauptgrund für diese großen Wirkungsunterschiede liegt in der unterschiedlichen Wartezeit in der Ausgangssituation. Je länger ein Sparprozeß dauert, umso stärker schlägt eine Veränderung der regelmäßig erbrachten Sparleistung auf die Wartezeiten durch.

b) Die Veränderung der Wartezeit durch eine Sparratenänderung fällt im Niedrigzinstarif fast durchweg höher aus als im Hochzinstarif. Lediglich beim Zinsverfahren hat eine Ratenänderung des Ratensparers im Hochzinstarif die größere Wirkung. Die Erklärung dieser Beobachtung ist die gleiche wie unter a). Die Wartezeiten im Niedrigzinstarif sind beim Soforteinzahler deutlich und beim Ratensparer geringfügig höher als im Hochzinstarif. Somit wirkt eine Ratenerhöhung im Niedrigzinstarif länger und deswegen stärker als im Hochzinstarif.

c) Die drei Bewertungsverfahren implizieren unterschiedliche Niveaus der Wirkung einer Ratenänderung. Die Guthaben-Zins-Methode weist die höchsten Effekte auf, das Zinsverfahren die niedrigsten. Besonders auffällig sind hierbei die extremen Wirkungsunterschiede beim Soforteinzahler. Die Guthaben-Zins-Methode ermöglicht einem Schnellsparer durch eine zusätzlich erbrachte regelmäßige Sparrate bei konstanter Zielbewertungszahl eine etwa 2,5 bis 3-fach stärker reduzierte Wartezeit als die Saldensummen- bzw. die Zinsmethode. Für den Ratensparer sind diese Unterschiede erheblich geringer.

3.1.2.1 3 Zur Änderung der Wartezeit bei Änderung des Guthabenzinses

Die Diskussion um die Höhe des Guthabenszinses gehört zu den in der Bausparliteratur häufig behandelten Themen[1]). Insofern sind Instrumente zur Analyse der Auswirkungen von Zinsänderungen auf die Abwicklung eines

[1]) vgl. z.B. Laux, H., Das kollektive Bausparen, a.a.O., S. 87 ff — Bundesaufsichtsamt für das Versicherungs- und Bausparwesen, Ablehnung der Einführung eines neuen Bausparkassen-Tarifes, Beschlußkammerentscheidung vom 6.10.1969, Veröffentlichungen des Bundesaufsichtsamtes, 1969, S. 357 — Laux, H., Die Zinsspanne ..., a.a.O., S. 461 ff.

Bausparvertrages, hier speziell auf die Wartezeit bis zur Zuteilung, von besonderem Interesse. Zur Berechnung der Ableitung der Wartezeit nach dem Guthabenszins

$$\frac{\partial t}{\partial GUTZIN} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial GUTZIN}}{\frac{\partial f}{\partial t}}$$

wird nur noch die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial GUTZIN}$ benötigt, denn $\frac{\partial f}{\partial t}$ ist bereits aus (3.30) bekannt.

Da der Verzinsungsfaktor g, der vom Guthabenszins abhängt, in der Bestimmungsgleichung (3.26) häufig vorkommt, ist die Berechnung dieser Ableitung formal zwar einfach, aber mühselig und resultiert in einer langen, komplizierten Formel. Aus diesem Grund wird hier auf die Darstellung dieser Ableitung verzichtet und nur die folgende Tabelle 3.V aufgenommen, die die Auswertung dieser Formel für die bereits im letzten Abschnitt erläuterten Beispielfälle angibt:

Fall	Bewertungs-verfahren	Tarif	Sparverhalten	
1a)		3 / 5	Rate	-1015.6
1b)	Guthaben-Zins-	3 / 5	Soforteinz.	-1024.3
1c)	Verfahren	2.5/4.5	Rate	-1243.5
1d)		2.5/4.5	Soforteinz.	-1474.3
2a)		3 / 5	Rate	-525.9
2b)	Salden-	3 / 5	Soforteinz.	-346.6
2c)	Methode	2.5/4.5	Rate	-640.1
2d)		2.5/4.5	Soforteinz.	-495.0
3a)		3 / 5	Rate	-1009.9
3b)	Zins-	3 / 5	Soforteinz.	-647.0
3c)	Verfahren	2.5/4.5	Rate	-1235.8
3d)		2.5/4.5	Soforteinz.	-931.4

Tabelle 3 V: Ableitung der Wartezeit bis zur Zuteilung bei einem Anspargrad von 42 % von Ratensparern und Soforteinzahlern nach dem Guthabenszins

In den Ergebnissen der Tabelle 3.V spiegeln sich folgende Effekte:

a) Bei der Saldensummen- und der Zins-Methode ist die Wirkung einer Habenzinserhöhung für den Ratensparer deutlich höher als für den Soforteinzahler. Nur im Guthaben-Zins-Verfahren profitiert der Soforteinzahler stärker von einer Erhöhung des Guthabenszinses als der Ratensparer. Bei Anhebung des Zinses im Niedrigzinstarif von 2,5% auf

2,6% sinkt die Wartezeit des Soforteinzahlers in erster Näherung um 1,47% Quartale, die des Ratensparers nur um 1,24 Quartale.

b) Die Wirkung einer Guthabenszins-Erhöhung ist im Niedrigzinstarif durchweg höher als im Hochzinstarif. Dies liegt hier zum einen wiederum an den längeren Wartezeiten im Niedrigzinstarif, aufgrund derer der höhere Guthabenszins länger wirkt. Zum anderen ist die zweite Ableitung der Wartezeit nach dem Guthabenszins negativ (abnehmender Grenznutzen) und somit ergibt sich für den Niedrigzinstarif eine höhere Wirkung.

c) Die Wirkung einer Änderung des Guthabenszinssatzes ist in allen drei Bewertungsverfahren unterschiedlich. Die Unterschiede sind ähnlich wie bei einer Sparratenänderung drastisch. Die geringsten Auswirkungen auf die Wartezeit bis zur Zuteilung hat eine Guthabenszinsänderung im Saldensummenverfahren. Mit der Zins-Methode steht der Ratensparer in dieser Hinsicht etwa so wie mit der Guthabens-Zins-Methode. Der Soforteinzahler hingegen profitiert im Guthabens-Zins-Verfahren erheblich stärker von einer Zinserhöhung als im reinen Zins-Verfahren.

3.1.2.2 Zuteilung bei Einstellung der regelmäßigen Sparraten bei Erreichen des Mindestanspargrades

Die individuelle Bewertungszahl eines Bausparvertrages, der nur bis zum Erreichen des Mindestanspargrades regelmäßig bespart wurde, erreicht die Zielbewertungszahl $BWZIEL$, wenn folgende Gleichung erfüllt ist (vgl. auch Gleichung (3.23)):

$$BWZIEL = \frac{SFPER \cdot SS_{tm+i}^{SW} + KFAKT \cdot BSE_{tm+i}^{SW} + ZFAKT \cdot ZINS_{tm+i}^{SW}}{NFAKT}. \quad (3.32)$$

Am leichtesten läßt sich diese Gleichung nach i lösen, wenn man die Summanden im Zähler in einen konstanten Teil, der von der Zeit tm abhängt und einen von i abhängigen variablen Teil aufspaltet:

$$BWZIEL = \frac{SFPER(SS_{tm}^{S} + SSN_{i}^{S} + EINMAL) + KFAKT(BSE_{tm}^{S} g^{i} + EINMAL)}{NFAKT} + \frac{ZFAKT(ZINS_{tm}^{S} + ZINS_{i}^{SW}))}{NFAKT} \quad (3.33)$$

Die Einmaleinzahlung $EINMAL$ muß hier gesondert berücksichtigt werden, denn sie wird erst bei Zuteilung geleistet. Dabei ist $ZINS_i^{SW}$ die Summe der Zinsen, die vom Zeitpunkt tm (Erreichen des Mindestanspargrades) bis i anfallen. Für sie gilt:

$$ZINS_i^{SW} = \sum_{j=1}^{i} BSE_{tm}^{S}(g^j - 1) \tag{3.34}$$

$$= BSE_{tm}^{S}\left(\frac{g^{i+1} - g}{g - 1} - i\right)$$

Einsetzen von (3.19) und (3.34) in (3.33) ergibt:

$$NFAKT \cdot BWZIEL - SFPER \cdot SS_{tm}^{S} - ZFAKT \cdot ZINS_{tm}^{S} - (SFPER + KFAKT)EINMAL$$
$$= SFPER \cdot BSE_{tm}^{S}\frac{g^{i+1} - g}{g - 1} + KFAKT \cdot BSE_{tm}^{S} \cdot g^i + ZFAKT \cdot BSE_{tm}^{S}\left(\frac{g^{i+1} - g}{g - 1} - i\right)$$

Durch die Zusammenfassung nach den Faktoren g^i, i, 1 und Multiplikation mit $(g - 1)$ erhält man:

$$0 = g^i \cdot [BSE_{tm}^{S}((SFPER + ZFAKT) \cdot g + KFAKT(g - 1))]$$

$$- i \cdot [BSE_{tm}^{S} \cdot ZFAKT(g - 1)]$$

$$- [BSE_{tm}^{S}(SFPER + ZFAKT) \cdot g$$

$$+ (g - 1) \cdot (NFAKT \cdot BWZIEL - SFPER \cdot SS_{tm}^{S}$$

$$- ZFAKT \cdot ZINS_{tm}^{S} - (SFPER + KFAKT)EINMAL)[$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = g^i \cdot [g(SFPER + KFAKT + ZFAKT) - KFAKT] \tag{3.35}$$

$$- i \cdot [(g - 1) \cdot ZFAKT]$$

$$- [g \cdot (SFPER + ZFAKT)$$

$$+ \frac{g - 1}{BSE_{tm}^{S}}(NFAKT \cdot BWZIEL - SFPER \cdot SS_{tm}^{S}$$

$$- ZFAKT \cdot ZINS_{tm}^{S} - (SFPER + KFAKT)EINMAL)]$$

(3.35) hat ähnlich wie (3.26) die Form

$$a \cdot b^i - c \cdot i - d = 0$$

und ist daher der gleichen numerischen Lösungsmethode mit dem Newton-Verfahren zugänglich. Mit *iz* ist im folgenden die Lösung von (3.35) nach *i* bezeichnet. *iz* ist also die Wartezeit vom Erreichen des Mindestansparguthabens bis zur Zuteilung.

Aus Gleichung (3.35) können Änderungen der Wartezeit bis zur Zuteilung für den Fall der vorzeitigen Einstellung regelmäßiger Sparbeiträge, die durch Veränderungen von Merkmalen des untersuchten Sparertyps induziert werden, entsprechend dem in 3.1.2.1.2 dargestellten Ansatz berechnet werden. Dazu müßte wiederum eine Verstetigung des Formelmodells unterstellt werden (vgl. 3.2.1.6) und die Ableitungen der durch (3.35) gegebenen impliziten Funktion $i(BWZIEL,\ldots,\ldots)$ nach den interessierenden Größen gebildet werden. Da die Durchführung dieser Ableitungen keine grundsätzlich neuen Erkenntnisse bringt und zu sehr komplizierten Formeln führt, wird hier darauf verzichtet. Bezüglich des Einsatzes solcher Ableitungen zur Untersuchung konkreter Fragestellungen wird auf 3.1.2.1.2 verwiesen.

3.1.3 Zur Berücksichtigung eines eventuellen Bonuszinses

Wie bereits in Abschnitt 2.2 erläutert, stellt sich der Bonuszins für den Bausparer als Option bei Zuteilung dar. Bis zur Zuteilung wird sein Bausparguthaben mit dem normalen Guthabenszins *GUTZIN* verzinst, der Bonus wird auf einem Sonderkonto gutgeschrieben. Auch die Bewertungszahl wird so berechnet, als gäbe es den Bonus nicht. Erst wenn der Bausparer bei seiner Zuteilung für den Bonus optiert, wird er nachträglich so gestellt, als habe er eine Verzinsung mit dem Guthabenszinssatz $GBZ = GUTZIN + BONZIN$ erhalten. Der Bonus wird ihm zusammen mit seinem Bausparguthaben ausgezahlt, allerdings ohne den Darlehensanspruch zu mindern. In der Sparphase braucht der Bonus auf Seiten des Sparers also überhaupt nicht in Betracht gezogen zu werden. In der Darlehensphase gilt dies übrigens genauso, da die Option für oder gegen den Bonus auf Seiten des Sparers nur die Höhe des Darlehenszinssatzes beeinflußt. Als Fazit ist also festzuhalten, daß die Bonusverzinsung bei der mathematischen Behandlung eines Bausparvertrages aus Sparersicht außer Ansatz bleiben kann. Berücksichtigt werden muß der Bonus jedoch bei der später erfolgenden Betrachtung der Ertrags- und Liquiditätslage der Bausparkasse als Unternehmen.

3.1.4.1 Darlehenshöhe und Gebühren bei Darlehensvergabe

Bei allen Berechnungen für die Darlehensphase wird vom Anfangsbruttodarlehen ausgegangen, von dem Betrag also, der dem Darlehenskonto bei der Vergabe des Darlehens belastet wird. Dies hat den Vorteil, daß die anfängliche Darlehenshöhe ohne Probleme variiert werden kann. Insbesondere kann ein Fixdarlehen, das in einigen Tarifen mancher privater Bausparkassen in Höhe von 50% der Bausparsumme vorgesehen ist, leicht berücksichtigt werden. Im Regelfall bemißt sich jedoch das Nettodarlehen als Differenz von Bausparsumme und Bausparguthaben bei Zuteilung:

$$NDAR = 1 - BSE^{Zut}. \tag{3.36}$$

BSE^{Zut} ist dabei entweder BSE^{SW}_{lz+GR}, falls die regelmäßigen Sparraten bis zur Zuteilung erbracht wurden oder $BSE^{SW}_{lm+lz+GR}$, falls die Entrichtung der Sparbeiträge bei Erreichen des Mindestanspargrades aufgehört hat. Beim Fixdarlehen gilt hingegen:

$$NDAR = FIXDAR. \tag{3.36'}$$

In diesem Fall ist der Verlauf und die Länge der Darlehensphase also völlig unabhängig von der Sparphase, nur ihr zeitlicher Beginn wird durch die Sparphase bestimmt. Im Normalfall hingegen hängt die Dauer der Darlehensphase vom Anspargrad bei Zuteilung ab.

Das Bruttodarlehen berechnet sich gemäß den Ausführungen in 2.3.5 als:

$$BDZ_0 = (1 + DAMNUM + AGIO)\, NDAR. \tag{3.37}$$

Das ausgezahlte Darlehen beträgt (vgl. 2.3.5):

$$\begin{aligned} DARAUS &= NDAR - DISAG \cdot BDZ_0 \\ &= (1 - DISAG(1 + DAMNUM + AGIO))\, NDAR. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Disagio und Agio treten niemals gemeinsam auf. Sie sind in Formel (3.38) gleichzeitig berücksichtigt, um eine einheitliche Darstellung zu ermöglichen.

3.1.4.2 Die Verzinsung der Bauspardarlehen

Bei der Verzinsung der Bauspardarlehen ergeben sich im Gegensatz zu den Sparzinsen keine Probleme bei der mathematischen Abbildung des in der Bausparpraxis angewandten Verzinsungsverfahrens. Der Darlehenszinssatz *DARZIN* ist im eigentlichen Sinne kein Jahreszinssatz, er ist bei fast allen Bausparkassen das Vierfache des Quartalszinssatzes. Die Darlehenszinsen werden zu Beginn jedes Quartals berechnet und auch bereits kapitalisiert. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zur Verzinsung der Bausparguthaben, wo die Zinsen erst zu Jahresende dem Bausparkonto gutgeschrieben werden. Der Jahreszinssatz, der sich bei dieser unterjährigen Kapitalisierung ergibt, liegt über dem tariflichen Zinssatz *DARZIN*.

$$(1 + \frac{DARZIN}{DPER})^{DPER} > 1 + DARZIN \quad \text{für } DPER \geq 2 .$$

Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus der Bernoullischen Ungleichung (vgl. auch Abschnitt 3.1.1.2.2).

Der zweite wesentliche Unterschied zur Guthabensverzinsung liegt darin, daß Tilgungsbeiträge, die während eines Quartals (*DPER* = 4) bei der Bausparkasse eingehen, für die Berechnung der Darlehenszinsen erst zu Beginn des nächsten Quartals darlehensmindernd berücksichtigt werden. Konkret bedeutet dies, daß die Darlehenszinsen zu Beginn eines Quartals unter Zugrundelegung des aktuellen Kontenstandes für drei Monate berechnet werden, ohne die monatlich eingehenden Tilgungsbeiträge zu beachten. Viele Bausparkassen folgen im Gegensatz hierzu in der Sparphase dem Monatsmodell (*SPER* = 12), bei dem die Kontenstände in Monatsabständen für die Verzinsung berücksichtigt werden. Die hier im Formelmodell benutzte Verzinsung mit $(1 + \frac{DARZIN}{DPER})$, die zu Beginn des Quartals kapitalisiert wird, entspricht also exakt der Bausparpraxis. In den folgenden Formeln wird der Verzinsungsfaktor mit dem Symbol d bezeichnet:

$$d = 1 + \frac{DARZIN}{DPER}$$

3.1.4.3 Die Berechnungsformel für das Bauspardarlehen

Das Bauspardarlehen wird durch drei Einflußfaktoren verändert:

a) Tilgungsbeiträge
b) Darlehenszinsen
c) Bearbeitungsgebühr

a) Die Tilgungsbeiträge werden als TR pro Periode erfaßt. TR ist je nach Höhe von $DPER$ ein entsprechendes Vielfaches der monatlichen Tilgungsrate $TRATE$. Bei quartalsmäßiger Periodisierung ist z.B. $TR = 3 \cdot TRATE$.

b) Die Darlehenszinsen im t-ten Quartal nach Darlehensauszahlung betragen entsprechend den obigen Ausführungen

$$ZD_t^S = \frac{DARZIN}{DPER} BDZ_t^S .$$

c) Die Bearbeitungsgebühr $VERGEB$ wird auch in der Darlehensphase wie in der Sparphase als regelmäßiger Abzug von der Tilgungsrate behandelt, obwohl sie jährlich erhoben wird. Der regelmäßig zu erhebende Betrag, der einer Jahresleistung von $VERGEB$ entspricht, ergibt sich für die Sparphase (vgl. Abschnitt 3.1.1.3 c)) zu

$$VT = VERGEB \frac{\frac{DARZIN}{DPER}}{(1 + \frac{DARZIN}{DPER})^{DPER} - 1}$$

Die Bearbeitungsgebühr wird also dadurch berücksichtigt, daß im folgenden mit der korrigierten Tilgungsrate

$$TRV = TR - VT = TR - VERGEB \frac{\frac{DARZIN}{DPER}}{(1 + \frac{DARZIN}{DPER})^{DPER} - 1} \qquad (3.39)$$

gerechnet wird.

Für das Darlehen in der Periode t nach Auszahlung gilt also:

$$BDZ_t^S = BDZ_{t-1}^S + \frac{DARZIN}{DPER} BDZ_{t-1}^S - TRV$$

$$\Leftrightarrow \quad BDZ_t^S = d \cdot BDZ_{t-1}^S - TRV . \qquad (3.40)$$

Dies führt auf folgende Formel in Abhängigkeit vom Bruttodarlehen BDZ_0:

$$BDZ_t^S = BDZ_0 \cdot d^t - TRV \frac{d^t - 1}{d - 1} . \qquad (3.41)$$

Die Richtigkeit von (3.41) wird rekursiv über t bewiesen:

$$t = 0 : BDZ_0 = BDZ_0 \cdot d^0 - TRV \frac{d^0 - 1}{d - 1} = BDZ_0$$

Gelte (3.41) für t. Mit (3.40) gilt dann für $t+1$:

$$\begin{aligned} BDZ^S_{t+1} &= d \cdot BDZ^S_t - TRV = d \cdot [BDZ_0 \cdot d^t - TRV \frac{d^t - 1}{d-1}] - TRV \\ &= BDZ_0 \cdot d^{t+1} - TRV [\frac{d \cdot (d^t - 1)}{d-1} + 1] \\ &= BDZ_0 \cdot d^{t+1} - TRV \frac{d^{t+1} - d + d - 1}{d-1} \\ &= BDZ_0 \cdot d^{t+1} - TRV \frac{d^{t+1} - 1}{d-1} . \end{aligned}$$

Dies ist gerade Formel (3.41) auf $t+1$ angewandt. Damit ist die Richtigkeit von (3.41) gezeigt.

3.1.4.4 Die Tilgungsdauer

Der Tilgungsvorgang ist beendet, wenn das Darlehen auf Null gefallen ist, also getilgt ist. Die Bestimmungsgleichung für die Tilgungsdauer tt lautet also:

$$BDZ^S_{tt} = 0 \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 0 = BDZ_0 \cdot d^{tt} - TRV \frac{d^{tt} - 1}{d-1} \\ &\Leftrightarrow 0 = d^{tt}(BDZ_0 - \frac{TRV}{d-1}) + \frac{TRV}{d-1} \\ &\Leftrightarrow d^{tt} = \frac{-\frac{TRV}{d-1}}{BDZ_0 - \frac{TRV}{d-1}} \\ &\Leftrightarrow tt = -\frac{\log(\frac{TRV}{TRV - (d-1)BDZ_0})}{\log d} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Da tt im allgemeinen nicht ganzzahlig ist, muß die Tilgungsdauer noch aufgerundet werden. Das bedeutet, daß im letzten Tilgungsabschnitt nicht mehr der ganze Tilgungsbeitrag TRV aufgebracht werden muß, sondern nur noch das Restdarlehen $BDZ^S_{\lfloor tt \rfloor}$ getilgt werden muß .

3.1.4.5 Die Kassenleistung

Gemäß der Definition aus Abschnitt 2.4.2 ist die Kassenleistung die mit den Liegezeiten gewichtete Summe der Darlehensbestände. Wegen der Periodisierung

sind die Zeitgewichtungsfaktoren alle gleich $\frac{1}{DPER}$. Für die Summierung der Darlehensbestände spielt es nun eine Rolle, ob die Zahlung der Tilgungsbeiträge am Periodenbeginn oder am Periodenende erfolgt. Erfolgt sie am Periodenbeginn, so hat das Anfangsdarlehen BDZ_0 keinen zeitlichen Bestand, da sofort nach Auszahlung die erste Tilgungsrate eingeht. Werden die Tilgungsbeiträge am Periodenende geleistet, so besteht der Kontostand BDZ_0 eine Periode. Die Kassenleistung KL_{tt}^E bei Tilgung am Periodenende ist also gleich der Kassenleistung KL_{tt}^A bei Tilgung am Periodenanfang erhöht um $\frac{BDZ_0}{DPER}$:

$$KL_{tt}^E = KL_{tt}^A + \frac{BDZ_0}{DPER}.$$

Sei tt die abgerundete Tilgungsdauer. Für KL_{tt}^A gilt dann unter Verwendung von (3.41):

$$KL_{tt}^A = \frac{1}{DPER}\sum_{t=1}^{tt} BDZ_t^S = \frac{1}{DPER}\sum_{t=1}^{tt}\{BDZ_0 \cdot d^t - TRV\frac{d^t-1}{d-1}\} \tag{3.44}$$

$$= \frac{1}{DPER}[BDZ_0\sum_{t=1}^{tt} d^t - \frac{TRV}{d-1}\sum_{t=1}^{tt} d^t + tt\cdot\frac{TRV}{d-1}]$$

$$= \frac{1}{DPER}[(BDZ_0 - \frac{TRV}{d-1})(\frac{d^{tt+1}-1}{d-1} - 1) + tt\cdot\frac{TRV}{d-1}]$$

$$= \frac{1}{DPER}[(BDZ_0 - \frac{TRV}{d-1})\frac{d^{tt+1}-1}{d-1} + (tt+1)\frac{TRV}{d-1} - BDZ_0].$$

In der entsprechenden Formel für KL_{tt}^E fällt der letzte Term $-BDZ_0$ einfach weg.

3.1.4.6 Die Berücksichtigung einer Stufentilgung

Gegeben sei eine Anzahl $TILMAX$ von Tilgungsstufen. Tariflich sind für alle diese Stufen die Tilgungsraten TRV_i festgelegt. Außerdem ist die maximale Dauer $TDAU_i$ für alle bis auf die letzte Stufe gegeben. Das Darlehen wird also zunächst $TDAU_1$ Perioden mit der Rate TRV_1 getilgt. Danach wird für $TDAU_2$ Perioden der Tilgungsbeitrag TRV_2 entrichtet. Dieser Stufenplan wird bis $TILMAX - 1$ fortgesetzt. Die letzte Ratenhöhe TRV_{TILMAX} wird bis zur endgültig Tilgung des Darlehens geleistet. Mit BDZ_0^i wird im folgenden das Anfangsdarlehen der i-ten Tilgungsstufe bezeichnet (d.h. $BDZ_0^1 = BDZ_0$). Somit gilt gemäß (3.41) für das

Darlehen in der t–ten Periode der i–ten Tilgungsstufe:

$$BDZ_t^i = BDZ_0^i \cdot d^t - TRV_i \frac{d^t - 1}{d - 1} . \tag{3.45}$$

Für die Anfangsdarlehen der einzelnen Stufen gilt dann also:

$$BDZ_0^{i+1} = BDZ_{TDAU_i}^i = BDZ_0^i \cdot d^{TDAU_i} - TRV_i \frac{d^{TDAU_i} - 1}{d - 1} . \tag{3.46}$$

Die Dauer der letzten Tilgungsstufe berechnet sich gemäß (3.42) und (3.43) als:

$$tt = \frac{\log\left(\frac{TRV_{TILMAX}}{TRV_{TILMAX} - (d-1) \cdot BDZ_0^{TILMAX}}\right)}{\log d}$$

3.1.4.7 Jährlich steigende Tilgungsbeiträge

3.1.4.7.1 Das Bauspardarlehen bei steigender Tilgung

Einige private Bausparkassen führen seit 1983 einen Tarif, der unter anderen Neuerungen gegenüber der damaligen Tariflandschaft wachsende Tilgungsbeiträge vorsieht. An jedem Kalenderjahreswechsel wird der monatlich zu erbringende Tilgungsbeitrag um fünf Prozent erhöht. Die Berücksichtigung eines solchen Rhythmus führt bei der mathematischen Abbildung regelmäßig zu unübersichtlichen Formeln. Für die kalenderjahrmäßige Kapitalisierung der Guthabenzinsen in der Sparphase wurde dieses Problem in Abschnitt 3.1.1.2.1 exemplarisch analysiert.

Um ähnliche Schwierigkeiten hier zu vermeiden, wird von einem regelmäßigen Anwachsen der Tilgungsrate in jeder Periode ausgegangen. Analog zur Bestimmung des Verzinsungsfaktors in der Sparphase wird das Wachstum der Tilgungsbeiträge pro Quartal auf

$$TRW_t = (1 + WR) \cdot TRW_{t-1}$$

festgelegt, so daß die Tilgungsrate in einem Jahr gerade mit dem Faktor $(1 + WR)^{DPER} = 1 + \overline{WR}$ wächst. Die Periodenrate WR wird aus der tariflichen Jahresrate $\overline{WR}$ also folgendermaßen berechnet:

$$WR = (1 + \overline{WR})^{\frac{1}{DPER}} - 1 .$$

Der Wachstumsfaktor für die Tilgungsrate wird im folgenden mit w bezeichnet:

$$w = 1 + WR\,.$$

Diese periodenweise Änderung der Tilgungsbeiträge würde mit der tarifflichen Anfangstilgungsrate $TRW_0 = TR$ jedoch zu einer wesentlich schnelleren Tilgung des Darlehens führen, als es in der Realität der Fall ist, da in der Realität die Tilgungsrate für ein Jahr konstant bleibt. Es muß also eine Korrektur der tarifflichen Anfangstilgung vorgenommen werden, um die Entwicklung des Bauspardarlehens richtig zu erfassen. Hierzu kann man z.B. so vorgehen, daß die Anfangstilgung so korrigiert wird, daß die Summe der jährlichen Zins- und Tilgungsbeiträge mit der Realität übereinstimmt. Dazu müßte gelten:

$$DPER \cdot TR = \sum_{i=0}^{DPER-1} (1+WR)^i \cdot TRW_0\,.$$

$$\Leftrightarrow\ DPER \cdot TR = TRW_0 \cdot \frac{(1+WR)^{DPER} - 1}{(1+WR) - 1}$$

$$\Leftrightarrow\ TRW_0 = TR \cdot DPER \cdot \frac{WR}{WR}\,.$$

Sinnvoller erscheint es jedoch, die Korrektur so vorzunehmen, daß die reinen Tilgungen eines Jahres mit denen der tatsächlichen Darlehensabwicklung übereinstimmen. Damit wird erreicht, daß die Darlehensstände an den Jahresenden denen der tatsächlichen Entwicklung entsprechen. Jede andere Methode würde dazu führen, daß sich tatsächlicher und modellmäßiger Darlehensstand Jahr für Jahr immer weiter von einander entfernen. Hier stimmen die unterjährigen Werte nicht exakt überein, dafür jedoch die wichtigere langfristige Entwicklung und die Tilgungsdauer.

Um die reinen Tilgungen bestimmen zu können, wird zunächst die Formel für das Bauspardarlehen entwickelt. Es gilt:

$$BDZ_t^{SW} = BDZ_{t-1}^{SW} \cdot d + VT - TRW_0 \cdot w^{t-1}\,. \tag{3.47}$$

Zu beachten ist hier, daß im Gegensatz zu (3.40) die Bearbeitungsgebühr $VERGEB$ nicht als konstanter Teil des Tilgungsbeitrages erhoben werden kann, denn sonst würde sie ebenfalls der jährlichen Steigerung mit w unterliegen. (3.47) führt auf die folgende Darlehensformel in Abhängigkeit von BDZ_0:

$$BDZ_t^{SW} = BDZ_0 \cdot d^t + VT\frac{d^t - 1}{d - 1} - TRW_0\frac{d^t - w^t}{d - w}\,. \tag{3.48}$$

Der Beweis der Richtigkeit von (3.48) erfolgt wieder rekursiv über t:

$$t = 0: \; BDZ_0^{SW} = BDZ_0 \cdot 1 + VT \cdot 0 - TRW_0 \cdot 0 = BDZ_0$$

Gelte (3.48) für t. Mit (3.47) gilt dann für $t+1$:

$$\begin{aligned} BDZ_{t+1}^{SW} &= BDZ_t^{SW} \cdot d + VT - TRW_0 \cdot w^t \\ &= BDZ_0 \cdot d^{t+1} + VT\left[\frac{d(d^t-1)}{d-1} + 1\right] \\ &\quad - TRW_0\left[\frac{d(d^t-w^t)}{d-w} + w^t\right] \\ &= BDZ_0 \cdot d^{t+1} + VT\frac{d^{t+1}-d+d-1}{d-1} \\ &\quad - TRW_0\frac{d^{t+1}-d\cdot w^t+d\cdot w^t-w^{t+1}}{d-w} \\ &= BDZ_0 \cdot d^{t+1} + VT\frac{d^{t+1}-1}{d-1} - TRW_0\frac{d^{t+1}-w^{t+1}}{d-w}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade (3.48) für $t+1$. Damit ist die Richtigkeit von (3.48) bewiesen. Setzt man den Wert für TRW_0 aus (3.51) in (3.48) ein, so erkennt man, daß Formel (3.41), die das Bauspardarlehen bei konstanter Tilgung angibt, als Spezialfall mit $w = 1$ in (3.48) enthalten ist. Daher kann bei allen folgenden Berechnungen mit (3.48) gearbeitet werden. Der Fall konstanter Tilgungsraten ergibt sich aus den dann abgeleiteten Formeln durch Einsetzen von $w = 1$.

Die reine Tilgung einer Periode t ist definiert als die Differenz zwischen den Darlehensbeständen in den Perioden $t+1$ und t. Somit gilt:

$$\begin{aligned} RT_t^W &= BDZ_t^{SW} - BDZ_{t+1}^{SW} = BDZ_0 \cdot d^t(1-d) \\ &\quad + VT\frac{d^t(1-d)}{d-1} - TRW_0\frac{d^t(1-d)-w^t(1-w)}{d-w} \\ &= BDZ_0 \cdot d^t(1-d) - VT \cdot d^t + TRW_0\frac{d^t(d-1)-w^t(w-1)}{d-w}. \end{aligned}$$

Die reine Tilgung eines Jahres RT_t^{WJ} ergibt durch Summierung von RT_t^W über PER Perioden:

$$RT_t^{WJ} = \sum_{i=0}^{DPER-1} RT_{t+i}^{W}$$

$$= ((1-d)BDZ_0 - VT)\frac{d^{DPER}-1}{d-1} \qquad (3.49)$$

$$+ \frac{TRW_0}{d-w}[(d-1)\frac{d^{DPER}-1}{d-1} - (w-1)\frac{w^{DPER}-1}{w-1}]$$

$$= ((1-d)BDZ_0 - VT)\frac{d^{DPER}-1}{d-1} + TRW_0(d^{DPER} - w^{DPER})$$

Die reine Tilgung bei konstanten Tilgungsraten TR ergibt sich als

$$RT_t = BDZ_t^S - BDZ_{t+1}^S = BDZ_0 \cdot d^t(1-d) - (TR - VT)\frac{d^t(1-d)}{d-1}$$

$$= ((1-d)BDZ_0 - VT)d^t + TR \cdot d^t .$$

Die reine Jahrestilgung RT_t^J bei konstanten Tilgungsbeiträgen ergibt sich durch Summierung von RT_t über $DPER$ Perioden also zu:

$$RT_t^J = \sum_{i=0}^{DPER-1} RT_t = ((1-d)BDZ_0 - VT)\frac{d^{DPER}-1}{d-1} + TR\frac{d^{DPER}-1}{d-1}. \quad (3.50)$$

Durch Gleichsetzen von RT_t^{WJ} und RT_t^J erhält man die Bedingung, die erfüllt sein muß, damit die jährliche reine Tilgung bei regelmäßig wachsenden Tilgungsbeiträgen die gleiche Höhe hat, wie bei unterjährig konstanten Tilgungsbeiträgen, die nur am Jahresende erhöht werden. Die Terme in (3.49) und (3.50), die BDZ_0 und VT betreffen, sind gleich. Sie können also sofort durch Subtraktion eliminiert werden:

$$RT_t^{WJ} = RT_t^J$$

$$\Leftrightarrow \quad TRW_0\frac{(d^{DPER} - w^{DPER})}{d-w} = TR\frac{d^{DPER}-1}{d-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad TRW_0 = TR \cdot \frac{(d-w)(d^{DPER}-1)}{(d-1)(d^{DPER} - w^{DPER})} . \qquad (3.51)$$

Mit dieser korrigierten Anfangstilgung TRW_0 muß also gerechnet werden, um die Darlehensentwicklung möglichst gut der tatsächlichen anzunähern.

3.1.4.7.2 **Die Tilgungsdauer bei steigender Tilgung**

Zur Berechnung der Tilgungsdauer bei steigender Tilgungsannuität wird der Zeitpunkt bestimmt, an dem das Bauspardarlehen auf 0 gefallen ist:

$$BDZ_t^{SW} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = d^t \cdot \left[BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}\right] + w^t \frac{TRW_0}{d-w} - \frac{VT}{d-1} \tag{3.52}$$

Diese Gleichung kann nicht wie die entsprechende Gleichung (3.43) bei konstanten Tilgungsraten explizit nach t aufgelöst werden. Sie hat die allgemeine Form

$$a \cdot b^t + c \cdot d^t - e = 0\,. \tag{3.53}$$

Gleichungen dieser Form sind nur in vier Spezialfällen explizit nach t lösbar:

- $b = d$
- $e = 0$
- $a = 0$ oder $b = 0$ oder $b = 1$
- $c = 0$ oder $d = 0$ oder $d = 1$

Der Fall $b = d$ ist in der bauspartechnischen Anwendung (3.52) im allgemeinen nicht erfüllt. Der Fall $e = 0$ kann jedoch dadurch herbeigeführt werden, daß auf die Berücksichtigung der ohnehin geringfügigen Bearbeitungsgeühr *VERGEB* verzichtet wird. Als Lösung von (3.53) ergibt sich dann:

$$a \cdot b^t = -c \cdot d^t \tag{3.54}$$

$$\Leftrightarrow\ t \log b + \log|a| = t \log d + \log|c|$$

$$\Leftrightarrow\ t = \frac{\log|c| - \log|a|}{\log b - \log d}\,.$$

Auf (3.52) bezogen ergibt dies:

$$t = \frac{\log\left|\frac{TRW_0}{d-w}\right| - \log\left|BDZ_0 - \frac{TRW_0}{d-w}\right|}{\log d - \log w}\,. \tag{3.55}$$

Eine Lösung von (3.54) existiert grundsätzlich nur, falls gilt:

(i) $b \geq 0\,,\ d \geq 0$ (da sonst b^t, d^t nur für ganzzahlige t definiert sind)

(ii) $a \cdot c \leq 0$ (da sonst die beiden Seiten von (3.54) verschiedene Vorzeichen haben).

(i) ist in der vorliegenden Anwendung (3.52) trivialerweise erfüllt. Bedingung (ii) ist erfüllt, wenn die Tilgungsrate nicht so niedrig ist, daß das Bauspardarlehen wegen der jeweils zu kapitalisierenden Darlehenszinsen nie getilgt werden kann. Eine ähnliche Bedingung gilt auch für die Existenz einer Lösung von (3.12): Die Tilgungsrate TRV muß größer sein als die Darlehenszinsen auf das Bruttodarlehen BDZ_0. Sonst ist die Lösungsgleichung (3.43) mathematisch unsinnig, da der Zähler den Logarithmus einer negativen Zahl enthielte. Soll die Bearbeitungsgebühr in die Lösung von (3.52) einbezogen werden, so muß die Gleichung (3.52) numerisch nach t gelöst werden. Dazu wird wiederum das Newton-Verfahren benutzt, das bereits in Abschnitt 3.1.2.1 bei der Berechnung der Wartezeit bis zur Zuteilung beschrieben wurde.

3.1.4.7.3 Die Kassenleistung bei steigender Tilgung

Sei tt die abgerundete Lösung der Gleichung (3.52). Für die Kassenleistung KL^{WA} gilt dann analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.1.4.5:

$$DPER \cdot KL_{tt}^{WA} = \sum_{t=1}^{tt} BDZ_t^{SW} \tag{3.56}$$

$$= \sum_{t=1}^{tt} [BDZ_0 \cdot d^t + VT\frac{d^t - 1}{d-1} - TRW_0\frac{d^t - w^t}{d-w}]$$

$$= [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1})\sum_{t=1}^{tt} d^t - tt\frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}(\sum_{t=1}^{tt} d^t - \sum_{t=1}^{tt} w^t)]$$

$$= [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1})(\frac{d^{tt+1}-1}{d-1} - 1) - tt\frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}(\frac{d^{tt+1}-1}{d-1} - \frac{w^{tt+1}-1}{w-1})]$$

$$= [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1})\frac{d^{tt+1}-1}{d-1} - (tt+1)\frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}(\frac{d^{tt+1}-1}{d-1} - \frac{w^{tt+1}-1}{w-1})$$

$$- BDZ_0].$$

In der entsprechenden Formel für KL_{tt}^{WE} fällt der Term $-BDZ_0$ wiederum einfach weg.

3.1.5 Der einzelne Bausparvertrag aus der Sicht der Bausparkasse als Unternehmen

In den vorangegangenen Abschnitten des dritten Teils wurden Formeln entwickelt, die den Ablauf eines Bausparvertrages wiedergeben. In diesem Abschnitt werden Beurteilungskriterien für Bausparverträge aus der Sicht des Unternehmens Bausparkasse vorgestellt und ihre Darstellung aus den bisher entwickelten Formeln abgeleitet.

Die Unternehmung Bausparkasse verfolgt mit ihrem Geschäftsbetrieb im Grunde die Ziele von zwei verschiedenen Einrichtungen. Auf der einen Seite ist sie Verwalterin des Bausparkollektivs. Das Interesse der Kollektivmitglieder, der Bausparer also, richtet sich einzig und allein auf die sorgfältige Abwicklung der tariflichen Bausparverträge mit möglichst kurzen Wartezeiten bis zur Vergabe von Bauspardarlehen. Das Bausparkollektiv an sich ist in keiner Weise auf die Erzielung von Gewinnen ausgerichtet. Die Bausparkasse als Unternehmung hat diese Interessen stellvertretend für die Kollektivmitglieder zu wahren, da diese selbst nicht an der Kollektivverwaltung teilnehmen können. Auf der anderen Seite ist die Bausparkasse selbst ein Unternehmen, das neben anderen Zielen des Geschäftsbetriebs auch auf Gewinnerzielung ausgerichtet ist.

Die Bausparkasse benötigt also Beurteilungskriterien für einzelne Bausparverträge und für das ganze Kollektiv, die die Wirkungen auf die beiden Interessenlagen deutlich macht. Im folgenden werden einige Kennziffern vorgestellt, die die Wirkungen einzelner Bausparverträge auf die Liquiditäts- und Ertragslage der Bausparkasse erfassen. Es handelt sich hier um Größen, die den Bausparvertrag als Ganzes erfassen. Sie geben keinen Aufschluß über die zeitliche Verteilung der einzelnen Wirkungen. Zur Beurteilung konkreter Fragestellungen derart, ob einzelne Verträge in der augenblicklichen und in der für die nächste Zukunft zu erwartenden Geschäftssituation wünschenswert oder vertretbar sind, können diese Kriterien also nicht herangezogen werden. Sie sind mehr grundsätzlicher und theoretischer Natur und geben Aufschluß über die prinzipielle Funktionsfähigkeit von Bausparkollektiven unter gewissen Voraussetzungen.

3.1.5.1 Der Belastungsgrad (Kassen- zu Sparerleistung)

Bereits in Abschnitt 2.4.2 wurde der Belastungsgrad als das Verhältnis von Kassenleistung zu Sparerleistung eingeführt. Die Sparerleistung gibt das akkumulierte Kapital an, das der Sparer während seiner Sparphase dem

Bausparkollektiv zur Verfügung gestellt hat. Die Kassenleistung gibt das akkumulierte Kapital an, das in der Darlehensphase durch den Sparer gebunden war. Das Verhältnis der beiden gibt also an, ob der Sparer das Bausparkollektiv über seine gesamte Abwicklungsdauer gesehen stärker belastet hat, als er ihm gedient hat (Belastungsgrad > 1), oder ob seine Leistung die des Kollektivs an ihn überwog (Belastungsgrad < 1).

Nachdem Kassen- und Sparerleistung in den vorangegangenen Abschnitten für verschiedene Abwicklungsformen hergeleitet wurden, ergibt sich der Belastungsgrad hier einfach als Quotient der beiden. Eine wichtige Unterscheidung muß hier jedoch getroffen werden zwischen den beiden bislang betrachteten extremen Annahmen über die Zahlungsweise von Spar- und Tilgungsbeiträgen.

Es wurden jeweils die Fälle der Einzahlungen am Periodenbeginn und am Periodenende betrachtet. Für die Zuteilung hat die Wahl des Zahlungsmodus keinen Einfluß, da sie die für die Zuteilung maßgeblichen Größen Saldensumme, Guthaben und Zinssumme nicht beeinflußt. Lediglich bei dem von den öffentlichen Bausparkassen praktizierten unechten Monatsmodell der Guthabensverzinsung (Einzahlungen bis zum 15. eines Monats werden ab dem nächsten Monatsersten verzinst) würde sich die Zinssumme dadurch ändern. Betrachtet man in diesem Fall die beiden Extreme der Einzahlung ab dem 16. eines Monats bis zum 15. des Folgemonats, so bleibt auch hier wieder die Zuteilung von der Wahl des Zahlungstermins unbeeinflußt.

Auch in der Darlehensphase spielt es für den Sparer im Hinblick auf die Zinshöhe keine Rolle, ob er seine Tilgungsbeiträge zu Beginn oder zu Ende der Perioden entrichtet, da die Darlehenszinsen ohnehin von dem für ihn ungünstigsten Saldo zu Beginn der Verzinsungsperiode berechnet werden. Einige Bausparkassen sehen in ihren ABB für den Fall verspäteter Tilgungseingänge allerdings weitere "Verzugszinsen" oder andere Sanktionen vor, so daß der Darlehensnehmer gar keine sinnvolle Wahl zwischen verschiedenen Zahlungsterminen hat.

Der Liquiditätseffekt einer solchen Wahl des Zahlungstermins für die Bausparkasse ist jedoch ziemlich gravierend. Verglichen mit Spar- und Tilgungseingängen am Periodenbeginn bedeuten Zahlungseingänge jeweils am Periodenende zweierlei. Zum einen wird die Sparerleistung um den letzten Summanden

$$\frac{1}{SPER} BSE^{S}_{tz+GR}$$

reduziert, da der Saldo des Bausparkontos bei Guthabensauszahlung erst im Auszahlungszeitpunkt entsteht, während er bei Einzahlungen am Periodenbeginn bereits eine Periode lang existiert. Zum anderen erhöht sich die Kassenleistung um das Bruttodarlehen , gewichtet mit dem Zeitfaktor $\frac{1}{DPER}$

$$\frac{BDZ_0}{DPER},$$

da die erste Tilgungsrate erst am Ende der Auszahlungsperiode geleistet wird. Bei Einzahlungen am Periodenbeginn erscheint dieser Darlehenssaldo dagegen nicht auf dem Konto, weil sofort die erste Tilgungsrate davon abgezogen wird.

Die beiden Kapitalbindungsgrößen Sparerleistung und Kassenleistung werden von der Verschiebung der Einzahlungen vom Periodenbeginn an das Periodenende für die Liquiditätslage des Kollektivs ungünstig beeinflußt. Dementsprechend reagiert der Belastungsgrad entsprechend stark. Zur Quantifizierung dieses Effekts wird hier auf Abschnitt 6.1.1 verwiesen.

Für den Fall, daß regelmäßige Sparraten bis zu dem Bewertungsstichtag erbracht werden, an dem die Zuteilung des Sparers feststeht, ergibt sich die mathematische Formel für den Belastungsgrad bei Einzahlungen am Periodenbeginn aus (3.25) in Verbindung mit (3.19) und (3.56):

$$KS^{WA} = \frac{KL^{WA}_{tt}}{SL^{A}_{tz+GR}}. \tag{3.57}$$

In der entsprechenden Formel für den Belastungsgrad KS^{WE} bei Einzahlungen am Periodenende fällt der Term $-\frac{BDZ_0}{DPER}$ im Zähler weg, und im Nenner ist tz durch $(tz-1)$ zu ersetzen. Für spätere Berechnungen sei jetzt schon auf die abhängigen Größen in diesem Ausdruck hingewiesen. Im Zähler hängt die Tilgungsdauer tt aus (3.52) vom Bruttodarlehen BDZ_0 , der Tilgungsrate TRV , dem Darlehenszins $DARZIN$, der Periodisierung $DPER$ und der Rate WR ab. Das Bruttodarlehen hängt wegen (3.36) und (3.37) von allen Parametern der Sparphase ab. Im Nenner hängt die Wartezeit tz gemäß der Lösungsgleichung (3.26) ebenfalls von allen Parametern der Sparphase ab.

3.1.5.2.1 Definition des Barwertes

Der Barwert (Gegenwartswert, Kapitalwert) ist ein Instrument der Betriebswirtschaftslehre zur Ermittlung des Wertes einer Zahlungsreihe. Spezielle Anwendung findet der Barwert in der Investitionstheorie, wo er dazu dient, Investitionen vergleichbar zu machen. Das Problem bei der Vergleichbarkeit liegt darin, daß die Laufzeiten verschiedener Investitionsobjekte stark variieren können. Außerdem weist jede Investition ihr eigenes Zahlungsmuster auf. Meist liegen die Aufwendungen zu Beginn des Projektes, die Ertragsphase beginnt erst nach einer gewissen Zeit. Prinzipiell ist jedoch auch der umgekehrte Verlauf denkbar.

Allgemein ist der Barwert BW einer Zahlungsreihe $\{z_i\}_{i=0,\ldots,N}$

$$BW = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{1}{1+p}\right)^i \cdot z_i \,. \tag{3.58}$$

Verschiedene Aufnahme- und Anlagezinssätze lassen sich in der Formel für den Barwert berücksichtigen. Spaltet man BW in zwei Teilsummen auf, die jeweils nur die positiven bzw. negativen Zahlungen enthalten, so kann man zwei verschiedenen Zinssätzen p_G und p_D für Guthaben und Darlehen Rechnung tragen:

$$BW' = \sum_{z_i \geq 0} \left(\frac{1}{1+P_G}\right)^i \cdot z_i + \sum_{z_i < 0} \left(\frac{1}{1+p_D}\right)^i \cdot z_i \,. \tag{3.59}$$

3.1.5.2.2 Der klassische Barwert eines Bausparvertrages (Gesamtbarwert)

Die Zahlungsreihe eine Bausparvertrages hat eine ganz einfache Struktur. In der Sparphase fließen der Bausparkasse nur die Soforteinzahlung und die regelmäßigen Sparraten zu. Bei Zuteilung zahlt die Bausparkasse dann nach der Guthabensruhezeit GR das Bausparguthaben aus. Nach einer Darlehensruhezeit DR wird anschließend das Nettodarlehen, eventuell um ein Disagio gemindert, ausgezahlt. In der Darlehensphase erhält die Bausparkasse dann die regelmäßigen Tilgungsbeiträge. Nur dies sind die tatsächlich fließenden Zahlungen. Alles andere wie Gebühren, Guthabens- und Darlehenszinsen stellen interne Verrechnungen dar. Die Bausparkasse schreibt dem Bausparer zwar Guthabenszinsen gut, tatsächlich fließen sie ihm jedoch erst bei Auszahlung der Bausparsumme zu. Das

Zahlungsprofil eines Bausparvertrages bei Zahlungseingängen am Periodenbeginn sieht also folgendermaßen aus:

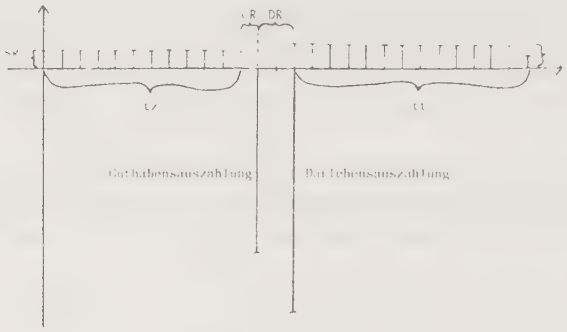

Abbildung 3.VI: Zahlungsprofil eines Bausparvertrages

Bei Zahlungen am Periodenende müßte die Einzahlungsreihe jeweils um eine Periode nach rechts verschoben werden. Zusätzlich können natürlich noch eine Soforteinzahlung in der ersten Periode und eine Einmaleinzahlung vor Zuteilung auftreten. Die geringere letzte Tilgungsrate ist darauf zurückzuführen, daß der Darlehenssaldo in der letzten Periode vor der endgültigen Tilgung im allgemeinen nicht die Höhe der regelmäßigen Tilgungsrate TR aufweist. Diese letzte Rate wird im folgenden mit TRL bezeichnet. Ihre Höhe entspricht dem letzten Darlehenssaldo BDZ_{tt-1}. Der Abzinsungsfaktor für die Bausparguthaben wird im folgenden mit v_G bezeichnet

$$v_G = (\frac{1}{1+p_G})^{\frac{1}{SPER}}.$$

Der Barwert der Spareinzahlungen bei Zahlungstermin am Periodenbeginn berechnet sich dann als:

$$BW^{SA} = SOFORT + \sum_{t=0}^{tz-1} SR \cdot v_G^t + EINMAL \cdot v_G^{tz-1}$$

$$= SOFORT + SR\frac{v_G^{tz}-1}{v_G-1} + EINMAL \cdot v_G^{tz-1}.$$

Wegen der Verschiebung aller Einzahlungen um eine Periode bei Einzahlungen am

Periodenende gilt:

$$BW^{SE} = v_G \cdot BW^{SA}$$

Der Barwert der Guthabensauszahlung ist

$$BW^{G} = -v_G^{tz+GR} \cdot BSE_{tz+GR}^{SW} .$$

Erst mit der Darlehensauszahlung wird der Saldo des Bausparkontos negativ. Aus diesem Grund wird ab diesem Zeitpunkt mit dem Darlehenszins p_D abgezinst und dann durch den Faktor $v_G^{tz+GR+DR}$ auf die Gegenwart abdiskontiert.

Der Barwert der Darlehensauszahlung ist mit (3.36) und (3.38) also

$$BW^{D} = -v_G^{tz+GR+DR}(1 - DISAG \cdot (DAMNUM + AGIO)) \cdot (1 - BSE_{tz+GR}^{SW}) .$$

Beim Barwert der Tilgungsbeiträge wird ein mögliches jährliches Wachstum sofort mitberücksichtigt. Die Faktoren für die einzelnen Einzahlungen betragen dann

$$(1+w)^i \cdot \frac{1}{(1+\overline{p}_D)^i} = (\frac{1+w}{1+\overline{p}_D})^i .$$

$\overline{p}_D$ ist dabei der Perioden–Abzinsungsfaktor, der sich aus der jährlichen Abzinsung p_D folgendermaßen errechnet:

$$\overline{p}_D = (1+p_D)^{\frac{1}{DPER}} - 1 .$$

Der Abzinsungsfaktor für die Darlehensphase wird im folgenden mit v_D bezeichnet:

$$v_D = \frac{1}{1+\overline{p}_D} .$$

Der Barwert der Tilgungsbeiträge ist dann:

$$\begin{aligned} BW^{TA} &= v_G^{tz+GR+DR}(\sum_{t=0}^{tt-2} TRW_0 \cdot (w \cdot v_D)^t + TRL \cdot v_D^{tt-1}) \\ &= v_G^{tz+GR+DR}(TRW_0 \frac{(w \cdot v_D)^{tt-1} - 1}{w \cdot v_D - 1} + TRL \cdot v_D^{tt-1}) . \end{aligned}$$

Bei Einzahlungen am Periodenende gilt wiederum

$$BW^{TE} = BW^{TA} \cdot v_D .$$

Somit lautet die Berechnungsformel für den Gesamtbarwert der kompletten Abwicklung eines Bausparvertrages bei Zahlungen zum Periodenbeginn:

$$BW_G^A = BW^{SA} + BW^G + BW^D + BW^{TA} \tag{3.60}$$

$$= SOFORT + SR\frac{v_G^{tz} - 1}{v_G - 1} + EINMAL \cdot v_G^{tz-1}$$

$$- v_G^{tz+GR} \cdot BSE_{tz+GR}^{SW}$$

$$+ v_G^{tz+GR+DR}\left[- (1 - DISAG \cdot (DAMNUM + AGIO)) \cdot (1 - BSE_{tz+GR}^{SW}) \right.$$

$$\left. + TRW_0 \frac{(w \cdot v_D)^{tt-1} - 1}{w \cdot v_D - 1} + TRL \cdot v_D^{tt-1} \right].$$

Für den Barwert BW^E bei Einzahlungen am Periodenende müssen die Terme in (3.60), die sich auf die Spar- und Tilgungsbeiträge beziehen, wieder mit den entsprechenden Faktoren v_G bzw. v_D multipliziert werden.

3.1.5.2.3 Der Barwert aus Zinsen und Gebühren (Ertragsbarwert)

Aus der Abwicklung eines Bausparvertrages läßt sich auch noch eine andere Zahlungsreihe ableiten. Für den Gesamtbarwert wurden die tatsächlich fließenden Zahlungen auf die Gegenwart abgezinst. Man kann jedoch argumentieren, daß die Liquidität, die sich aus dem Bauspargeschäft ergibt, in erster Linie dem Bausparkollektiv zur Verfügung steht und nicht der Bausparkasse. Als Konsequenz daraus ergibt sich für die Bausparkasse die Zahlungsreihe der Zinsen und Gebühren. Dies sind die originären Erträge und Aufwendungen der Bausparkasse aus dem Bauspargeschäft.

Die Erträge aus Gebühren und Darlehenszinsen entstehen der Bausparkasse jeweils in den entsprechenden Zeitpunkten und gehen in die Gewinnrechnung dieser Jahre ein. Die Aufwendungen (Guthabenszinsen) erhält der einzelne Sparer zwar erst am Ende seiner Sparphase ausgezahlt, dem Kollektiv müssen sie von der Bausparkasse aber bereits bei ihrer Entstehung als Zuteilungsmittel zur Verfügung gestellt werden.

Im einzelnen gehen folgenden Positionen in den Ertragsbarwert ein:

a) Abschlußgebühr

b) Bearbeitungsgebühr

c) Guthabenszinsen + Bonuszinsen

d) Darlehenszinsen

e) Gebühren bei Zuteilung
- Agio
- Disagio
- Darlehensgebühr
- Bonusverzichte

a) Die Abschlußgebühr wird hier der Einfachheit halber so behandelt, als würde sie komplett in der ersten Periode gezahlt, sie wird also nicht abgezinst. Im allgemeinen macht man dadurch keinen großen Fehler, denn bei der meist angewandten Quartalsbetrachtung betragen die Spargeldeingänge im ersten Quartal z.B. 1,2% für die Standardtarife. Die Abschlußgebühr von 1% wird dadurch gedeckt, bei einer Abschlußgebühr von 1,6% werden 0,4% im zweiten Quartal verrechnet.

b) Die Bearbeitungsgebühr wird in der Sparphase in jeder Periode als Abzug v, in der Darlehensphase als Abzug vT von den Spar- und Tilgungsbeiträgen erhoben. Ihr Barwert beträgt also:

$$BW^{VA} = \sum_{t=0}^{tz-1} v \cdot v_G^t + v_G^{tz+GR+DR} \cdot \sum_{t=0}^{tt-1} vT \cdot v_D^t \tag{3.61}$$

$$= v \frac{v_G^{tz} - 1}{v_G - 1} + vT \cdot v_G^{tz+GR+DR} \cdot \frac{v_D^{tt} - 1}{v_D - 1} .$$

c) Die Bausparkasse schreibt dem Bausparer seine Guthabenszinsen auf dem Bausparkonto gut und legt gleichzeitig die Differenz zur Verzinsung einschließlich Bonuszins auf einem Sonderkonto an, das ebenfalls in die Zuteilungsmasse eingeht. Die von der Bausparkasse aufzubringende Verzinsung beläuft sich also auf $GUTZIN + BONZIN$. Der entsprechende Zinsfaktor wird mit gb bezeichnet:

$$gb = (1 + GUTZIN + BONZIN)^{\frac{1}{SPER}} .$$

Die Summe der abdiskontierten Habenzinsen beträgt demnach unter Verwendung von (3.13) und (3.18):

$$BW^{HA} = BW^{HE} = \sum_{t=k}^{tz+GR} ZG_t^S \cdot v_G^t = (gb-1) \sum_{t=k}^{tz+GR-1} BSE_t \cdot v_G^t \tag{3.62}$$

$$= (gb-1)[R + \sum_{t=k+1}^{tz-1} v_G^t \cdot BSE_t^S + \sum_{t=tz}^{tz+GR-1} v_G^t \cdot BSE_t^{SW}]$$

$$= (gb-1)[R + \frac{v_G^k \cdot SRV}{gb-1} \sum_{t=k+1}^{tz-1} ((gb \cdot v_G)^{t-k} - v_G^{t-k})$$

$$+ v_G \cdot SOFABG^+ \sum_{t=k+1}^{tz-1} (gb \cdot v_G)^{t-1} + v_G^k \cdot R \sum_{t=k+1}^{tz-1} (gb \cdot v_G)^{t-k}$$

$$+ v_G^{tz} \cdot BSE_{tz}^S \sum_{t=0}^{GR-1} (gb \cdot v_G)^t]$$

$$= v_G^k \cdot SRV(\frac{(gb \cdot v_G)^{tz-k} - 1}{gb \cdot v_G - 1} - \frac{v_G^{tz-k} - 1}{v_G - 1})$$

$$+ (gb-1)[R + v_G^k(gb^{k-1} \cdot SOFABG^+ + R) \cdot \frac{(v_G \cdot gb)^{tz-k} - v_G \cdot gb}{v_G \cdot gb - 1}$$

$$+ v_G^{tz} \cdot BSE_{tz}^S \cdot \frac{(v_G \cdot gb)^{GR} - 1}{v_G \cdot gb - 1}].$$

Die weitere Auflösung von BSE_{tz}^S nach (3.13) bringt keine Vereinfachung der Formel (3.62).

d) Bei der Berechnung der diskontierten Darlehenszinsen wird wieder der Fall einer steigenden Tilgung sofort mitberücksichtigt. Der auf die Gegenwart abgezinste Wert der Darlehenszinsen berechnet sich demnach als:

$$BW^{DA} = BW^{DE} = v_G^{tz+GR+DR} \sum_{t=0}^{tt-1} ZD_t^{SW}(\frac{1}{1+p_D})^t \tag{3.63}$$

$$= v_G^{tz+GR+DR}(d-1) \sum_{t=0}^{tt-1} [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w})d^t$$

$$- \frac{VT}{d-1} + \frac{TRW_0}{d-w} \cdot w^t] \cdot v_D^t$$

$$= v_G^{tz+GR+DR}(d-1)[(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w})\frac{(d \cdot v_D)^{tt} - 1}{d \cdot v_D - 1}$$

$$- \frac{VT}{d-1} \cdot \frac{v_D^{tt} - 1}{v_D - 1} + \frac{TRW_0}{d-w} \cdot \frac{(w \cdot v_D)^{tt} - 1}{w \cdot v_D - 1}].$$

e) Die Gebühren, die bei Zuteilung bzw. Auszahlung der Bausparsumme erhoben werden, sowie ein eventuell während der Sparphase angesammeltes Bonusguthaben, auf dessen Auszahlung der Sparer zugunsten des niedrigeren Darlehenszinses ver-

zichtet, stellen die Bausparkassen nicht sofort bei Anfall in ihre Gewinnrechnung ein, sondern bilden daraus einen Rechnungsabgrenzungsposten, den sie während der Darlehensphase zinsanteilig auflösen.

Zum Teil steht dahinter die Motivation, daß z.B. Agio und Disagio einen Ausgleich für den gewährten niedrigeren Darlehenszins darstellen. Damit sich die Bausparkasse in etwa so stellt wie ohne diese Gebühren und mit dem höheren Darlehenszins, werden die Gebühren quasi wie Zinszuschüsse in den einzelnen Perioden behandelt. Beim Bonusverzicht ist es ähnlich. In der Sparphase mußte die Bausparkasse eine Verzinsung von $GBZ = GUTZIN + BONZIN$ leisten. In der Darlehensphase entrichtet der Bausparer den entsprechend hohen Darlehenszins entweder selbst (Option für den Bonus) oder die Bausparkasse entnimmt den abgegrenzten Bonusbeträgen die entsprechenden Zinszuschüsse (Option gegen den Bonus). Etwas anders sieht es bei der Darlehensgebühr aus. Es war bei vielen Bausparkassen lange geübte Praxis, die Darlehensgebühr sofort bei Anfall in die Gewinnrechnung einzustellen. Durch ein Urteil des BFH wurde im Januar 1978 die Verpflichtung von Kreditinstituten zur Abgrenzung von Verwaltungsgebühren festgestellt[1]. Der BFH begründet sein diesbezügliches Urteil mit der Argumentation, daß einmalige Gebühren bei der Vergabe von Darlehen "Bestandteil des Gesamtentgelts für die Überlassung des Kapitals"[2] seien und trotz Kostendeckungscharakters eine "Vorleistung" auf "eine noch nicht erbrachte zeitbezogene Gegenleistung"[3] sei. Daher erhebt der BFH die Abgrenzung aller Verwaltungsgebühren im Zusammenhang mit einer Darlehensgewährung zum Grundsatz ordnungsmäßiger Buchführung[4].

Die Höhe der Abgrenzung beträgt also:

$$ABGREN = BONUS + (DAMNUM + AGIO) \cdot NDAR \tag{3.64}$$

$$+ DISAG(1 + DAMNUM + AGIO) \cdot NDAR)$$

$$= BONUS + (DISAG + (1 + DISAG)(DAMNUM + AGIO)) \cdot (1 - BSE^{Zut.}) .$$

Die Höhe des Bonusguthabens $BONUS$ ergibt sich dabei als Differenz zwischen dem

---

[1] vgl. BFH-Urteil IV R 153/72 vom 19.1.1978, Bundessteuerblatt 1978, Teil II Nr.9, S.262-265.

[2] vgl. BFH-Urteil ..., a.a.O., S.263.

[3] vgl. BFH-Urteil ..., a.a.O., S. 263.

[4] vgl. BFH-Urteil ..., a.a.O., S. 263.

hypothetischen Bausparguthaben, das sich bei einer Verzinsung der Bausparcinlagen mit dem Zins $GBZ = GUTZIN + BONZIN$ ergäbe, und dem tatsächlich erreichten Bausparguthaben.

In der Bausparpraxis steht die Höhe der insgesamt zu leistenden Darlehenszinsen bei Auszahlung des Darlehens natürlich noch nicht fest, da die Tilgungsweise des Bausparers schwanken kann, z.B. sind Sondertilgungen immer möglich. Die Bausparkassen müssen sich bei der zinsanteiligen Auflösung der Gebühren also mit Durchschnittswerten behelfen.

Da in jeder modellhaften Abbildung des Bausparvorgangs die Tilgung des Bausparclarlehens von vornherein feststeht, kann im Formelmodell im Gegensatz zur Realität eine echte zinsanteilige Auflösung der abgegrenzten Beträge erfolgen. Dazu wird die Summe SDZ der Darlehenszinsen über die gesamte Darlehenslaufzeit berechnet. Wegen der Berechnungsweise der Darlehenszinsen ist diese Summe ein Bruchteil der Kassenleistung:

$$SDZ = \sum_{t=0}^{tt-1} ZD_t^S = \sum_{t=0}^{tt-1} \frac{DARZIN}{DPER} BDZ_t^S = \frac{DARZIN}{DPER} \cdot \sum_{t=0}^{tt-1} BDZ_t^S$$

$$= DARZIN \cdot KL_{tt}^E . \tag{3.65}$$

Die zinsanteilige Auflösung der abgegrenzten Beträge $ABGREN$ erfolgt nun dadurch, daß in jeder Periode t der Betrag

$$ABGREN \cdot \frac{ZD_t^S}{SDZ}$$

aufgelöst und in die Gewinnrechnung eingestellt wird. Zur Berechnung des Barwerts aus diesen Auflösungen stellt man fest, daß er wegen der Anbindung an die Darlehenszinsen gerade das $\frac{ABGREN}{SDZ}$-fache des Barwertes der Darlehenszinsen beträgt:

$$BW^{GA} = BW^{GE} = \frac{ABGREN}{SDZ} \cdot BW^{DA} = \frac{ABGREN}{DARZIN \cdot KL_{tt}^E} \cdot BW^{DA} . \tag{3.66}$$

Der Ertragsbarwert beläuft sich insgesamt also auf

$$BW_E^A = ABGEB + BW^{VA} + BW^{HA} + (1 + \frac{ABGREN}{DARZIN \cdot KL_{tt}^E}) \cdot BW^{DA} . \tag{3.67}$$

Ohne Abdiskontierung ($p_G = p_D = 0$) sind Gesamtbarwert und Ertragsbarwert konstruktionsgemäß gleich, denn die Differenz zwischen der Summe aller Spar- und

Tilgungsbeiträge des Bausparers und der Guthabens- und Darlehensauszahlung der Bausparkasse ist gerade der Verdienst der Bausparkasse aus der Abwicklung des Vertrages. Dieser wird durch den Saldo aus Darlehenszinsen und Gebühren auf der einen Seite und Guthabenszinsen auf der anderen Seite wiedergegeben. Die hergeleiteten Barwertformeln sind für $p_G = 0$, $p_D = 0$ nicht definiert, da sich oft in den Nennern die Terme

$$[(\frac{1}{1+p_G})^{\frac{1}{SPER}} - 1]\,,\ [\frac{1}{1+p_D} - 1]$$

befinden, die für $p_G = 0$, $p_D = 0$ die Werte 0 annehmen. An diesen Stellen muß dann der jeweilige tatsächliche Summenwert eingesetzt werden, der jedoch trivial zu berechnen ist:

$$\sum_{t=i}^{j} (\frac{1}{1+0})^{\frac{t}{t}} = \sum_{t=i}^{j} 1 = j - i + 1\,.$$

3.1.5.2.4 Der Liquiditätsbarwert

Der Ertragsbarwert abstrahiert bewußt von der Liquiditätswirkung eines Bausparvertrages. So würde der Ertragsbarwert im extremen Fall der sofortigen Zuteilung eines Vertrages nach Abschluß einen hohen Wert ausweisen, da die Bausparkasse keine Guthabenszinsen aufbringen muß , aber hohe Darlehenszinsen einnimmt. Der Gesamtbarwert wäre bei Unterstellung eines realitätsnahen Marktzinssatzes von 7% bis 9% als Abzinsungsfaktor negativ. Der Grund hierfür liegt in der negativen Spanne zwischen dem kollektiven Darlehenszins und dem Marktzins. Insofern ist der Ertragsbarwert nur ein Teilaspekt der Abwicklung eines Bausparvertrages. Die in ihm vernachlässigten Kosten der Refinanzierung von Darlehen und Erträge aus Anlage von Guthaben sind gerade sein Komplement zum Gesamtbarwert:

$$BW_L = BW_G - BW_E\,.$$

Ertragsbarwert und Liquiditätsbarwert sind also eine Aufspaltung des Gesamtbarwertes, der eine vollständige Abwicklung des Vertrages über den Kapitalmarkt unterstellt, in zwei Komponenten. Diese Komponenten geben das bauspartechnische Verdienst und den (positiven oder negativen) Ertrag der durch den Bausparvertrag freigesetzten bzw. gebundenen Liquidität wieder.

3.2 Die formelmäßige Abbildung eines Bausparkollektivs

In diesem Abschnitt wird aus den in 3.1 entwickelten Formeln für die Abwicklung eines einzelnen Bausparvertrages ein Formelwerk erstellt, das ganze Bausparkollektive beschreibt. In 3.2.1 werden die grundlegenden Formeln für Bausparkollektive entwickelt, die nur aus einer Sparerschicht bestehen. In 3.2.2 wird aufgezeigt, wie mittels der Formeln aus 3.2.1 Bausparkollektive aus mehreren Schichten erfaßt werden können.

3.2.1 Einschichtige Bausparkollektive

In diesem Abschnitt wird der Fall betrachtet, daß Bausparer derselben Schicht (d.h. mit identischen Definitionsmerkmalen) in aufeinanderfolgenden Perioden Verträge abschließen. Die Aggregate des daraus entstehenden Bausparkollektivs werden hier zunächst für den Fall fest vorgegebener Wartezeiten bis zur Zuteilung, die sich z.B. aus der Zielbewertungszahlenzuteilung ergeben, und konstanter Tilgungszeiten berechnet. Zusätzlich wird die Zuteilung nach einer verallgemeinerten Kassengleichung behandelt, die bestimmte Relationen zwischen den Bauspareinlagen und den Bauspardarlehen gewährleistet.

Über das Niveau des Neugeschäfts in aufeinanderfolgenden Jahren wird dabei angenommen, daß es sich mit einer konstanten Rate $\bar{r}$ ändert:

$$NVS_t = (1+\bar{r})NVS_{t-1} = \ldots = (1+\bar{r})^{t-1} NVS_1 = (1+\bar{r})^t NVS_0 \,. \qquad (3.68)$$

Dies schließt als Spezialfall mit $r = 0$ das über die Zeit konstante Neugeschäft ein. Der Zeitpunkt $t = 0$ wird im folgenden immer als der Startzeitpunkt der kollektiven Entwicklung angenommen. In $t = 0$ wird also der erste Bausparvertrag des Kollektivs mit der Bausparsumme NVS_0 abgeschlosen.

Wegen der unter Umständen unterschiedlichen Periodisierung in der Spar- bzw. in der Darlehensphase mit $SPER$ und $DPER$ werden im folgenden die zwei Periodenraten r_S und r_D benutzt, die die periodenweise Veränderung des Neugeschäfts in der Spar- und Darlehensphase wiedergeben. Sie berechnen sich aus der Jahresrate $\bar{r}$ folgendermaßen:

$$r_S = (1+\bar{r})^{\frac{1}{SPER}} - 1 \qquad r_D = (1+\bar{r})^{\frac{1}{DPER}} - 1 \,. \qquad (3.69)$$

Mit y_S und y_D werden folgende Größen bezeichnet, die häufig benötigt werden:

$$y_S = \frac{1}{1+r_S} \qquad y_D = \frac{1}{1+r_D}.$$

Entsprechend dieser Unterscheidung bezeichnen NVS_0^S und NVS_0^D die hypothetischen Periodenstartwerte für das Neugeschäft für Berechnungen über die Spar- bzw. Darlehensphase. NVS_0^S ergibt sich aus dem ersten Jahresneugeschäft NVS_0 durch folgenden Ansatz (falls $r \neq 0$):

$$\begin{aligned} NVS_0 &= \sum_{t=0}^{SPER-1} NVS_0^S (1+r_S)^t \\ \Leftrightarrow \quad NVS_0 &= NVS_0^S \cdot \frac{(1+r_S)^{SPER}-1}{r_S} \\ \Leftrightarrow \quad NVS_0^S &= NVS_0 \cdot \frac{r_S}{r} \end{aligned} \tag{3.70a}$$

Entsprechendes gilt für NVS_0^D:

$$NVS_0^D = NVS_0 \cdot \frac{r_D}{r}. \tag{3.70b}$$

Für den Spezialfall $r = r_S = r_D = 0$ gilt:

$$NVS_0^S = \frac{NVS_0}{SPER} \qquad NVS_0^D = \frac{NVS_0}{DPER}.$$

3.2.1.1 Der Begriff des Beharrungszustandes

Über Beharrungszustände von Bausparkollektiven wurde viel geschrieben[1]). Die grundlegende Idee wird am Spezialfall $r = 0$ der Neugeschäftsannahme (3.68) am einfachsten deutlich. Geht man davon aus, daß in jeder Periode identische Bausparverträge mit gleichen Vertragssummen abgeschlossen werden und unterstellt auch eine identische Zuteilung dieser Verträge (entweder nach einer festen Wartezeit tz oder einer festen Zielbewertungszahl), so ergibt sich folgender Verlauf der Kollektiventwicklung. Bis zur Wartezeit tz steigen die Bauspareinlagen des Kollektivs in jeder Periode t um den Wert BSE_t der Bauspareinlage eines Vertrages in der t-ten Periode seiner individuellen Entwicklung. Dies liegt daran, daß alle Verträge im Kollektiv in jeder Periode in die nächste individuelle Altersstufe

[1]) vgl z.B. Laux, H., Das kollektive Bausparen, a.a.O. — Heubeck, G., Beiträge zur mathematischen Theorie des Bausparens, Diss. Göttigen 1937 — Krahn, A., und Kaltenboeck, B., Das deutsche Bausparen, a.a.O..

eintreten. Der erste abgeschlossene Vertrag erreicht in t das individuelle Alter t, der zweite das Alter $t-1, \ldots$, der zuletzt abgeschlossene das Alter 2 und ein neu abgeschlossener Vertrag des Alters 1 kommt hinzu. Gegenüber $t-1$ ist also nur der Vertrag der Altersstufe t hinzugekommen.

Nachdem die kollektive Wartezeit tz erreicht ist, scheidet der älteste Vertrag aus der Sparphase aus und sein Bausparguthaben wird dem kollektiven Bauspareinlagenbestand entnommen. Da gleichzeitig mit der Auszahlung des ersten Guthabens der zweitälteste Vertrag die Altersstufe tz erreicht, ändert sich der kollektive Einlagenbestand nicht mehr. Er hat seinen statischen Beharrungszustand erreicht, den er solange beibehält, wie das Neugeschäft unverändert bleibt.

Die gleiche Entwicklung spielt sich beginnend mit der Auszahlung des ersten Bauspardarlehens bis zu dessen vollständiger Tilgung nun auf der Darlehensseite ab. Sobald der erste Bausparer sein Darlehen getilgt hat, hat auch der kollektive Bauspardarlehensbestand seinen statischen Beharrungszustand erreicht. Ab diesem Zeitpunkt bleiben sämtliche Aggregate des Bausparkollektivs auf dem erreichten Niveau konstant. Dieser Zustand heißt der statische Beharrungszustand eines Bausparkollektivs.

Das einsichtige Argument für das Eintreten des statischen Beharrungszustandes liegt in der Altersschichtung des Vertragsbestandes. Da in jeder Periode identische Verträge in das Kollektiv eingeschleust werden, besteht das Kollektiv nach seiner Anlaufphase, die bis zur Tilgung des ersten Darlehens reicht, aus je einem Vertrag jeder Altersstufe. Diese Altersschichtung ändert sich nicht mehr, da in jeder Periode der älteste Vertrag ausscheidet, alle anderen eine Altersstufe "aufrücken" und ein neuer Vertrag abgeschlossen wird.

Diese Argumentation ist offensichtlich völlig unabhängig von irgendwelchen konkreten Merkmalen der Sparerschicht und der Wartezeit bzw. Zielbewertungszahl. Die Annahme, die schon für sich allein zum Eintreten des statischen Beharrungszustandes führt, ist die Konstanz aller Merkmale und des Neugeschäfts. Daraus kann man sofort den Schluß ziehen, daß jedes Bausparkollektiv bei konstanten Rahmenbedingungen seinen statischen Beharrungszustand erreicht. Das gilt selbstverständlich auch für Kollektive, die aus mehreren Bausparerschichten zusammengesetzt sind, denn jede Schicht erreicht für sich allein genommen einen Beharrungszustand.

Die obigen Ausführungen sind im mathematischen Sinne natürlich kein Nachweis für das Eintreten eines Beharrungszustandes. Dieser Nachweis wird in den folgenden Abschnitten durch das Ausrechnen der entsprechenden Formeln erbracht. In diesen wird sich für die Bestände des Bausparkollektivs ergeben, daß sie sich über die Zeit exponentiell mit der Rate r der Neugeschäftsänderung ändern (dynamischer Beharrungszustand). Im Spezialfall $r = 0$ bedeutet das gerade den oben dargestellten statischen Beharrungszustand. Die beiden in der Bausparmathematik immer wieder behandelten, ausgezeichneten Zustände, der statische ($r = 0$) und der dynamische ($r \neq 0$) Beharrungszustand werden analytisch zusammen behandelt. Die einfacheren Berechnungsformeln für den statischen Beharrungszustand ergeben sich aus denen des dynamischen Beharrungszustandes als Spezialfall durch Einsetzen von $r = 0$. In der klassischen Bausparliteratur[1] wird der statische Beharrungszustand gesondert behandelt und seine Übereinstimmung mit dem Spezialfall $r = 0$ des dynamischen Beharrungszustandes gezeigt. Dies ist natürlich unnötiger Aufwand.

Der Beharrungszustand bietet sich als Beurteilungskriterium für eine Bausparerschicht an. Jede Sperrschicht erzeugt auf lange Sicht bei konstanten Verhältnissen ihren eigenen spezifischen Beharrungszustand. Die kollektiven Aggregate dieses Zustandes geben also Aufschluß z.B. darüber, ob ein Bausparkollektiv, das nur aus dieser Sparerschicht besteht, unter den unterstellten Rahmenbedingungen überlebensfähig ist.

Eine herausragende Rolle spielt der (statische oder dynamische) Beharrungszustand mit dem Anlegungsgrad 1. Er beschreibt die Situation, in der alle liquiden Mittel des Bausparkollektivs in Bauspardarlehen angelegt sind. Die kennzeichnende Gleichung

Bauspareinlagen im Beharrungszustand = Bauspardarlehen im Beharrungszustand

heißt Kassengleichung und ist identisch zur Bedingung

$$\text{Anlegungsgrad} = 1\,. \tag{3.71}$$

Im folgenden wird die verallgemeinerte Kassengleichung

$$a \cdot BSE = BDZ \quad \Leftrightarrow \quad \text{Anlegungsgrad} = a$$

[1] vgl. z.B. Laux, H., Das kollektive Bausparen, a.a.O., S. 283 ff — Laux, H., Grundzüge der Bausparmathematik, a.a.O., S. 28f.

verwendet, die die klassische Kassengleichung (3.71) als Spezialfall mit $a = 1$ enthält.

Die klassische Bausparmathematik beschäftigt sich fast ausschließlich mit dem Beharrungszustand beim Anlegungsgrad 1 und der entsprechenden Kassengleichung (3.71). Diese Tatsache hat ihren Ursprung in der grundlegenden Idee des Bausparkollektivs als zweckgerichtete Vereinigung zur möglichst schnellen Finanzierung von Bauprojekten. Die diesem grundlegenden Denkmodell eigene sofortige Vergabe aller Geldeingänge als Darlehen entspricht gerade der Kassengleichung (3.71).

In der Bausparpraxis ist ein Anlegungsgrad von 1 jedoch die Ausnahme. Der Geldeingang der Bausparkasse (Spargeldeingang, Guthabenszinsen, Tilgungseingänge und Wohnungsbauprämien) unterliegt vielen Unwägbarkeiten. Schon allein aus diesem Grund ist es in der Praxis kaum möglich, einen Anlegungsgrad von 1 genau zu erreichen, denn die Geldausgänge (Guthabens– und Darlehensauszahlungen) müßten sonst kontinuierlich entsprechend dem Geldeingang erfolgen.

Wenn die Bausparkasse nicht das Risiko eingehen will, innerhalb einer Zuteilungsperiode den Anlegungsgrad von 1 zu überschreiten und somit relativ teures Fremdgeld zur Refinanzierung aufnehmen zu müssen, so darf sie den Geldeingang dieser Zuteilungsperiode nur vorsichtig veranschlagen, um daraus Darlehen zu gewähren. Dies führt zum dem (gewünschten) Effekt, daß der Anlegungsgrad im allgemeinen unter 1 bleibt. Wird in einem Zuteilungstermin sogar nur die Zuteilungsmasse für die Darlehensgewährung der folgenden Zuteilungsperiode bereitgestellt, die am Stichtag vorhanden ist, so muß der Anlegungsgrad während der Zuteilungsperiode deutlich unter 1 bleiben (je nach Umschlagsgeschwindigkeit des Kollektivs zwischen 0,75 und 0,95).

In der Vergangenheit lagen die Anlegungsgrade der deutschen Bausparkassen noch wesentlich weiter unter 1, als dies aus der Zuteilungssystematik zu erklären ist. Erst seit den letzten Jahren nähern sich die Anlegungsgrade aller Bausparkassen dem bei gleichzeitig verlängerten Wartezeiten "natürlichen" Anlegungsgrad von 1. Es soll hier hervorgehoben werden, daß diese Entwicklung systemkonform ist. Das praktische Bausparsystem nähert sich jetzt dem theoretischen Denkmodell an. Untypisch im eigentlichen Sinne für das theoretische Bausparmodell war die Situation, die nach dem zweiten Weltkrieg bis gegen Ende der 70'er Jahre herr-

schte. Durch die starke staatliche Bausparförderung, mit der hauptsächlich wohnungsbaupolitische Ziele verfolgt wurden, war der Sparprozeß beim Bausparen eine attraktive Finanzanlage.

Dies führte dazu, daß erhebliche Beträge von Kapitalanlegern in die Bausparkollektive flossen, die die Liquiditätssituation der Bausparkassen stark verbesserten. Da aus den Bausparverträgen dieser Kapitalanleger in der Regel keine Darlehensansprüche geltend gemacht wurden, konnte die Zuteilung aller Bausparer, die ein Darlehen wünschten, lange Zeit schon bei erfüllten Mindestbedingungen erfolgen, d.h. also nach Erreichen des Anspargrades von 40% bzw. nach Ablauf der Mindestwartezeit. Der Einfluß der Kapitalanleger zusammen mit den positiven Liquiditätswirkungen der starken Neugeschäftsausweitungen war so groß, daß der Anlegungsgrad der Bausparkassen trotz der sparerfreundlichen Zuteilungskonditionen deutlich unter 1 blieb. Nachdem in den letzten Jahren die Bausparförderung so drastisch reduziert wurde, daß die Rendite der Sparphase eines Bausparvertrages heute je nach individuellen Bedingungen deutlich unter der anderer Finanzinvestitionen liegt, fallen diese wartezeitverkürzenden Faktoren immer stärker aus den Bausparkollektiven weg.

Wegen der oben dargelegten Gründe wird im vorliegenden Formelmodell die verallgemeinerte Kassengleichung betrachtet, mit der Beharrungszustände bei beliebigen Anlegungsgraden studiert werden können.

Der Beharrungszustand eines Bausparkollektivs wurde in diesem Abschnitt methodisch etwas anders eingeführt als in anderen Ansätzen der Bausparmathematik. Ursprünglich beschäftigte sich die Bausparmathematik ausgiebig mit der Frage, ob ein Bausparkollektiv überhaupt einen Beharrungszustand erreicht, wenn die Zuteilung der Bausparsummen von Beginn an entsprechend dem grundlegenden Denkmodell des Bausparsystems erfolgt[1].

Während das Eintreten des Beharrungszustandes bei Zuteilung nach fester Zielbewertungszahl oder Wartezeit ohne weiteres plausibel ist, ist es bei der Zuteilung nach der Sofortverteilungsprämisse (so nennen verschiedene Autoren die sofortige Anlage aller Geldeingänge in Bauspardarlehen)[2] nicht sofort klar, ob ein Beharrrungszustand eintritt.

---

[1] vgl. z.B. Heubeck, G., Beiträge zur mathematischen Theorie ..., a.a.O., S. 21 ff.

[2] vgl. z.B. Gramer, W., Das Wartezeitproblem ..., a.a.O., S. 55 ff.

3.2.1.2 Spargeldeingang und Bauspareinlagen

Der kollektive Spargeldeingang in der Periode t setzt sich aus den Spargeldeinzahlungen aller Verträge zusammen, die bis t abgeschlossen wurden und sich in t noch in der Sparphase befinden. Bei einer Zuteilungswartezeit von tz Perioden sind das also die Verträge mit Abschlußzeitpunkt $t_0, \ldots, t$. Dabei ist

$$t_0 = \begin{cases} t - tz + 1 & \text{falls } t - tz + 1 \geq 0 \\ 0 & \text{falls } t - tz + 1 \leq 0 \end{cases}.$$

Die Spargeldeinzahlung in jeder Periode t eines in τ abgeschlossenen Vertrages ist

$$SPE^S_{t,\tau} = NVS^S_\tau \cdot SR = NVS^S_0 \cdot (1 + r_S)^\tau \cdot SR .$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Bausparer, die ihre Verträge bis zur Periode $t - k$ abgeschlossen haben, noch ihre Abschlußgebühr abzahlen. Ihr Spargeldeingang kommt dem Kollektiv also noch nicht zugute, sondern fließt sofort in die Gewinnrechnung der Bausparkasse. Lediglich der Sparer mit dem Startzeitpunkt $t - k$ leistet in t bereits eine Spareinzahlung in Höhe von $R \cdot NVS^S_{t-k}$, den Restbetrag nach (3.0). Die Formel für den kollektiven Spargeldeingang einschließlich dieser Zahlung und der Soforteinzahlung des Vertrages, der in t abgeschlossen wurde, lautet also:

$$SPE_t = NVS^S_{t-k} \cdot R + NVS^S_t \cdot SOFABG^+ + \sum_{\tau=t_0}^{t-k} SPE_{t,\tau} \tag{3.72}$$

$$= NVS^S_{t_0} \cdot [(1 + r_S)^{t-k-t_0} \cdot R + (1 + r_S)^{t-t_0} \cdot SOFABG^+$$

$$+ SR \cdot \sum_{\tau=0}^{t-k-t_0} (1 + r_S)^\tau]$$

$$= NVS^S_{t_0} \cdot [(1 + r_S)^{t-k-t_0} \cdot R + (1 + r_S)^{t-t_0} \cdot SOFABG^+$$

$$+ SR \frac{(1 + r_S)^{t-k-t_0+1} - 1}{r_S}].$$

Der kollektive Spargeldeingang erreicht seinen Beharrungszustand nach $tz - 1$ Perioden. Ab dann gilt also mit $t_0 = t - tz + 1$:

$$SPE_t = NVS^S_{t-tz+1} \cdot [(1 + r_S)^{tz-k-1} \cdot R + (1 + r_S)^{tz-1} \cdot SOFABG^+ \tag{3.73}$$

$$+ \frac{SR}{r_S} \cdot ((1 + r_S)^{tz-k} - 1)].$$

Die Berechnung der kollektiven Bauspareinlagen BSE_t erfolgt entsprechend dem Spargeldeingang aus den Bausparguthaben der einzelnen Bausparverträge gemäß (3.13):

$$BSE_t = \sum_{\tau=t_0}^{t-k} NVS_0^S \cdot (1+r_S)^\tau \cdot BSE_{t-\tau+1}^S + NVS_{t-k+1}^S \cdot R \,. \tag{3.74}$$

Ein Vertrag, der in der Periode τ abgeschlossen wurde, hat in t die Altersstufe $t-\tau+1$, daher die Indizierung in (3.74). Die Summierung läuft nur bis $t-k$, da alle Verträge, die bis zu k Perioden vor t abgeschlossen wurden, noch ihre Abschlußgebühr tilgen und daher den Guthabensstand 0 aufweisen. Der in $t-k+1$ abgeschlossene Vertrag hat in t gerade das Guthaben $NVS_{t-k+1}^S \cdot R$. Einsetzen von (3.13) in (3.74) ergibt:

$$\begin{aligned} BSE_t &= NVS_{t_0}^S \cdot \sum_{\tau=0}^{t-t_0-k} (1+r_S)^\tau \cdot (SRV \frac{g^{t-t_0-\tau+1-k}-1}{g-1} \\ &\qquad + SOFABG^+ \cdot g^{t-t_0-\tau} + R \cdot g^{t-t_0-\tau+1-k} + EIN) \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$+ NVS_{t-k+1} \cdot R$$

$$\begin{aligned} &= NVS_{t_0}^S \cdot [\sum_{\tau=1}^{t-t_0-k+1} (1+r_S)^{t-t_0-k+1-\tau} \cdot (SRV \frac{g^\tau - 1}{g-1} \\ &\qquad + SOFABG^+ \cdot g^{t+k-1} + R \cdot g^\tau + EIN) \\ &\qquad + (1+r_S)^{t-t_0-k+1} \cdot R] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= NVS_{t_0}^S \cdot [(1+r_S)^{t-t_0-k+1} \\ &\qquad \cdot [\frac{SRV}{g-1} (\frac{(g \cdot y_S)^{t-t_0-k+2} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1} - \frac{y_S^{t-t_0-k+2} - y_S}{y_S - 1}) \\ &\qquad + (SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R) \frac{(g \cdot y_S)^{t-t_0-k+2} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1}] \\ &\qquad + EIN + (1+r_S)^{t-t_0-k+1} \cdot R] \end{aligned}$$

$$= {}_{NVS}{}^{S}_{t_0} \cdot [(1 + r_S)^{t - t_0 - k + 1}$$

$$\cdot [\frac{(g \cdot y_S)^{t - t_0 - k + 2} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1} (\frac{SRV}{g - 1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R)$$

$$- \frac{y_S^{t - t_0 - k + 2} - y_S}{y_S - 1} \cdot \frac{SRV}{g - 1} + R] + EIN] .$$

Es wurde hierbei beachtet, daß die Einmaleinzahlung vor Zuteilung EIN nur von einem Sparer erbracht wird, und zwar von dem in t_0 gestarteten, da er als erster zugeteilt wird. Das stationäre Niveau der Bauspareinlagen wird ebenfalls in der Periode $tz - 1$ erreicht. Durch Einsetzen von $t_0 = t - tz + 1$ erhält man aus (3.74) diese Größe. Die Terme $t - t_0 - k + 2$ werden dadurch gerade zu $tz - k + 1$.

Betrachtet man hier den Spezialfall des statischen Beharrungszustandes mit $r_S = 0$, so muß man den Term

$$\frac{y_S^{tz - k + 1} - y_S}{y_S - 1}$$

durch die zugrundeliegende Summe

$$\sum_{r=1}^{tz-k} 1 = tz - k$$

ersetzen. Die daraus resultierende Formel ist bis auf den Faktor ${}_{NVS}{}^{S}_{t_0}$ die gleiche, die sich durch die Substitution $t = tz$ aus (3.17) ergibt, die die Sparerleistung eines einzelnen Bausparvertrages angibt. Diese Gleichheit ist ein wesentliches Merkmal für den statischen Beharrungszustand: die Bauspareinlagen eines einschichtigen Bausparkollektivs im Beharrungszustand entsprechen bei konstantem Neugeschäft gerade der Sparerleistung jedes einzelnen Vertrages.

Diese Gleichheit läßt sich jedoch auch ohne Berechnung durch eine einfache Plausibilitätsbetrachtung ableiten. Wenn identische Bausparverträge in aufeinanderfolgenden Perioden abgeschlossen werden, so enthält das Kollektiv ab der Wartezeit tz je einen Vertrag jeder Altersstufe der Sparphase. Die Summe der Bauspareinlagen dieser Verträge ist deswegen gleich der Summe der Bausparguthaben eines einzelnen Vertrages über seine ganze Laufzeit. Der Querschnitt durch ein Kollektiv zu einem Zeitpunkt t ist also gleich dem Längsschnitt (Betrachtung eines Einzelvertrages).

Falls die Bausparer ihre Sparzahlungen vor dem Zuteilungstermin einstellen, ergeben sich etwas andere Formeln, die durch die Summierung der entsprechenden Guthabensstände nach den Formeln (3.13) und (3.18) entstehen. Interpretiert man tz hier als die Wartezeit bis zum Bewertungsstichtag bzw. bis zur Erreichung des Mindestanspargrades, so bleibt die Berechnungsformel für den kollektiven Spargeldeingang unverändert. Bei den Bauspareinlagen müssen zusätzlich die Perioden berücksichtigt werden, in denen das Bausparguthaben nur noch durch die gutgeschriebenen Zinsen wächst (Formel (3.18)):

$$BSE_{t,GR} = BSE_t + NVS^S_{t-tz+1} \cdot \sum_{i=1}^{GR} (1+r_S)^{-i} \cdot BSE^S_{tz} \cdot g^i \tag{3.75}$$

$$= BSE_t + NVS^S_{t-tz+1} \cdot BSE^S_{tz} \cdot \sum_{i=1}^{GR} (g \cdot y_S)^i$$

$$= BSE_t + NVS^S_{t-tz+1} \cdot BSE^S_{tz} \cdot \frac{(g \cdot y_S)^{GR+1} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1}$$

$$= NVS^S_{t-tz+1} [(1+r_S)^{tz-k}$$

$$\cdot [\frac{(g \cdot y_S)^{tz-k+1} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1} (\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R)$$

$$- \frac{y_S^{tz-k+1} - y_S}{y_S - 1} \cdot \frac{SRV}{g-1} + R] + EINMAL$$

$$+ \frac{(g \cdot y_S)^{GR+1} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1} \cdot (g^{tz-k} (\frac{SRV}{g-1}$$

$$+ SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R) - \frac{SRV}{g-1} + EINMAL)]$$

$$= NVS^S_{t-tz+1} [(1+r_S)^{tz-k}$$

$$\cdot (\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R) \frac{(g \cdot y_S)^{tz-k+GR+1} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1}$$

$$- \frac{SRV}{g-1} ((1+r_S)^{tz-k} \cdot \frac{y_S^{tz-k+1} - y_S}{y_S - 1} + \frac{(g \cdot y_S)^{GR+1} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1})$$

$$+ EINMAL \frac{(g \cdot y_S)^{GR+1} - 1}{g \cdot y_S - 1} + R(1+r_S)^{tz-k}] .$$

Man erkennt im letzten Schritt die Ähnlichkeit zur Formel (3.21). Wiederum führt hier die Betrachtung des statischen Beharrungszustandes ($r_S = 0$) dazu, daß

(3.75) und (3.21) gleiche Berechnungsformeln für die Sparerleistung eines einzelnen Vertrages und den Bauspareinlagenbestand liefern. Ein Vergleich mit (3.71) zeigt, daß (3.74) als Spezialfall mit $GR = 0$ in (3.75) enthalten ist.

3.2.1.3 Tilgungseingang und Bauspardarlehen

Bei den folgenden Berechnungen für die Darlehensphase wird die laufende Periode mit T bezeichnet, um den Unterschied der Periodisierungen mit $SPER$ und $DPER$ gegenwärtig zu halten. Mit tt wird hier wieder die Tilgungsdauer für das Bauspardarlehen bezeichnet, die aus Gleichung (3.52) zu berechnen ist. tzg bezeichnet im folgenden die auf die Periodisierung der Darlehensphase umgerechnete Wartezeit bis zur Guthabensauszahlung:

$$tzg = \frac{DPER}{SPER}(tz + GR).$$

Mit dieser Notation sind in der Periode t die Verträge der Abschlußperioden $t_0, \ldots, T - tzg + 1$ zugeteilt. t_0 ist dabei entweder der Zeitpunkt 0 oder $T - tt - tzg + 1$.

Der kollektive Tilgungseingang besteht gerade aus den Zins- und Tilgungsbeiträgen der bereits zugeteilten Bausparverträge. Für den Tilgungseingang ZTD_T unter Berücksichtigung einer jährlich steigenden Tilgungsrate w in Periode T gilt also:

$$\begin{aligned} ZTD_T &= \sum_{\tau=t_0}^{T-tzg+1} NVS_\tau^D \cdot TRW_0 \cdot w^{T-tzg+1-\tau} \qquad (3.76)\\ &= NVS_{t_0}^D \cdot TRW_0 \cdot w^{T-t_0-tzg+1} \cdot \sum_{\tau=0}^{T-t_0-tzg+1} \left(\frac{1+r_D}{w}\right)^\tau \\ &= NVS_{t_0}^D \cdot TRW_0 \cdot w^{T-t_0-tzg+1} \frac{\left(\frac{1+r_0}{w}\right)^{T-t_0-tzg+2} - 1}{\frac{1+r_D}{w} - 1} \\ &= NVS_{t_0}^D \cdot TRW_0 \cdot w^{T-t_0-tzg+2} \frac{\left(\frac{1+r_D}{w}\right)^{T-t_0-tzg+2} - 1}{1 + r_D - w}. \end{aligned}$$

Die Formel wurde mit t_0 wiederum variabel gehalten, um auch den Anlaufeffekt der Tilgungsphase erfassen zu können. Der Beharrungszustand der Tilgungseingänge und Bauspardarlehen wird nach der gesamten Abwicklungsdauer $tt + tzg$ erreicht. Durch entsprechendes Einsetzen von $t_0 = T - tt - tzg + 1$ in (3.76) erhält man

das Niveau der Tilgungseingänge im Beharrungszustand:

$$ZTD_T = NVS^D_{T-tt-tzg+1} \cdot TRW_0 \cdot w^{tt+1} \frac{(\frac{1+r_D}{w})^{tt+1} - 1}{1 + r_D - w} . \tag{3.77}$$

Die Fälle des statischen Beharrungszustandes $r_D = 0$ und der konstanten Tilgungsrate $w = 1$ können als Spezialfälle aus (3.77) abgeleitet werden. Lediglich für den Fall $1 + r_D = w$ muß wiederum die Summeninterpretation des Bruches in (3.77) benutzt werden.

Der kollektive Bauspardarlehensbestand setzt sich ähnlich wie der Bauspareinlagenbestand aus den Darlehensständen der verschiedenen Altersstufen auf dem entsprechenden Neugeschäftsniveau zusammen:

$$BDZ_T = \sum_{r=t_0}^{T} NVS^D_{r-tzg} \cdot BDZ^{SW}_{T-r+1} = \sum_{r=1}^{T-t_0+1} NVS^D_{T-r+1-tzg} \cdot BDZ^{SW}_r \tag{3.78}$$

$$= NVS^D_{T-tzg+1} \sum_{r=1}^{T-t_0+1} (1+r_D)^{-r} [BDZ_0 \cdot d^r + VT \frac{d^r - 1}{d-1} - TRW_0 \frac{d^r - w^r}{d-w}]$$

$$= NVS^D_{T-tzg+1} [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}) \sum_{r=1}^{T-t_0+1} (d \cdot y_D)^r$$

$$- \frac{VT}{d-1} \sum_{r=1}^{T-t_0+1} y_D^r + \frac{TRW_0}{d-w} \sum_{r=1}^{T-t_0+1} (w \cdot y_D)^r]$$

$$= NVS^D_{T-tzg+1} [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}) \frac{(d \cdot y_D)^{T-t_0+2} - d \cdot y_D}{d \cdot y_D - 1}$$

$$- \frac{VT}{d-1} \cdot \frac{y_D^{T-t_0+2} - y_D}{y_D - 1} + \frac{TRW_0}{d-w} \cdot \frac{(w \cdot y_D)^{T-t_0+2} - w \cdot y_D}{w \cdot y_D - 1}]$$

$$= NVS^D_{T-tzg+1} [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}) \frac{(d \cdot y_D)^{T-t_0+2} - 1}{d \cdot y_D - 1}$$

$$- \frac{VT}{d-1} \cdot \frac{y_D^{T-t_0+2} - 1}{y_D - 1} + \frac{TRW_0}{d-w} \cdot \frac{(w \cdot y_D)^{T-t_0+2} - 1}{w \cdot y_D - 1} - BDZ_0] .$$

Der Bauspardarlehensbestand erreicht seinen Beharrungszustand nach Ablauf der Tilgungsdauer tt. Seine Höhe erhält man demnach durch Einsetzen von $t_0 = T - tt + 1$ in (3.78):

$$BDZ_t = NVS^D_{T-tzg+1} [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}) \frac{(d \cdot y_D)^{tt+1} - 1}{d \cdot y_D - 1} \tag{3.79}$$

$$- \frac{VT}{d-1} \cdot \frac{y_D^{tt+1} - 1}{y_D - 1} + \frac{TRW_0}{d-w} \cdot \frac{(w \cdot y_D)^{tt+1} - 1}{w \cdot y_D - 1} - BDZ_0] .$$

Wiederum zeigt sich bei einem Vergleich mit Formel (3.56), daß diese Größe für den Fall des konstanten Neugeschäfts ($r_D = 0 \Leftrightarrow y_D = 1$) mit der Kassenleistung eines einzelnen Sparvertrages bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmt, wenn man wie beim Bausparguthaben Einzahlungen am Periodenanfang unterstellt. Geht man von Einzahlungen am Periodenende aus, so ist das Anfangsdarlehen miteinzubeziehen. Die Höhe der Bauspardarlehen im Beharrungszustand für diesen Fall $_{BDZ}z_t^P$ ergibt sich also durch Einsetzen von $t_0 = T - tt$ in (3.78). Der dadurch entstehende Effekt auf die Formel ist der gleiche wie bei der Kassenleistung eines Einzelvertrages (vgl. 3.1.4.7.3): Der Term $-{}_{BDZ}z_0$ fällt einfach weg.

3.2.1.4 Der Anlegungsgrad und die verallgemeinerte Kassengleichung

Bei den Formeln für die Bauspareinlagen und Bauspardarlehen im Beharrungszustand wurde bereits darauf hingewiesen, daß diese kollektiven Aggregate im Spezialfall des statischen Beharrungszustandes ($r_D = 0$) mit der Sparerleistung bzw. der Kassenleistung eines einzelnen Bausparvertrages übereinstimmen. Daraus folgt sofort, daß der Anlegungsgrad als Quotient aus Bauspardarlehen und Bauspareinlagen im Beharrungszustand mit der vertragsorientierten Maßzahl Kassen- zu Sparerleistung jedes einzelnen Bausparvertrages übereinstimmt. Diese Übereinstimmung verleiht der Kassen- zu Sparerleistung als Beurteilungskriterium für die Liquiditätswirkung einzelner Verträge zusätzliches Gewicht, denn sie gibt neben der in 2.4.2 und 3.1.5.1 dargestellten vertragsorientierten Interpretation gleichzeitig den Anlegungsgrad eines Bausparkollektivs im Beharrungszustand an, das ausschließlich aus Sparern der infrage stehenden Schicht besteht.

Aus den Formeln (3.77) und (3.79) wird für den kollektiven Tilgungseingang und den kollektiven Darlehensbestand der Begriff des dynamischen Beharrungszustandes deutlich, so wie er in 3.2.1.1 eingeführt wurde. Bis auf die mit der Rate r wachsenden Faktoren $_{NVS}r$ sind die Formeln unabhängig von der aktuellen Periode t. Diese kollektiven Aggregate verändern sich also mit der gleichen Rate wie das Neugeschäft. Die gleiche Beobachtung macht man an den Formeln (3.73) und (3.75) für den Spargeldeingang und den kollektiven Bauspareinlagenbestand.

Die Formeln (3.75) und (3.79) können also vereinfachend geschrieben werden als:

$$BSE_{t,GR} = NVS^{S}_{t-tz+1} \cdot \overline{BSE} = NVS^{S}_{0} \cdot (1+r_S)^{t-tz+1} \cdot \overline{BSE} \tag{3.80}$$

$$BDZ_T = NVS^{D}_{T-tzg+1} \cdot \overline{BDZ} = NVS^{D}_{0} \cdot (1+r_S)^{T-tzg+1} \cdot \overline{BDZ}\,. \tag{3.81}$$

$\overline{BSE}$ und $\overline{BDZ}$ sind dabei spezifische Konstanten, die nur von den Merkmalen der Sparerschicht, der Wartezeit tz bis zur Zuteilung und der Tilgungsdauer tt abhängen.

Zur Berechnung des Anlegungsgrades muß die unterschiedliche Periodisierung in der Spar- und Darlehensphase durch die Substitution

$$T+1 = \frac{DPER}{SPER} \cdot (t+1) \tag{3.82}$$

ausgeglichen werden. Der Anlegungsgrad im Beharrungszustand ergibt sich somit aus (3.80) - (3.82) unter Verwendung von (3.69) und (3.70) als

$$\begin{aligned} ANLEG_t &= \frac{BDZ_T}{BSE_{t,GR}} = \frac{NVS^{D}_{T-tzg+1} \cdot \overline{BDZ}}{NVS^{S}_{t-tz+1} \cdot \overline{BSE}} \\ &= \frac{NVS^{D}_{0} \cdot (1+r_D)^{\frac{DPER}{SPER}(t-tz-GR+1)} \cdot \overline{BDZ}}{NVS^{S}_{0}(1+r_S)^{t-tz+1} \cdot \overline{BSE}} \\ &= \frac{NVS_0 \frac{r_D}{\bar{r}}(1+\bar{r})^{\frac{t-tz-GR+1}{SPER}} \cdot \overline{BDZ}}{NVS_0 \frac{r_S}{\bar{r}}(1+\bar{r})^{\frac{t-tz+1}{SPER}} \cdot \overline{BSE}} \\ &= \frac{1}{(1+\bar{r})^{\frac{GR}{SPER}}} \cdot \frac{r_D \cdot \overline{BDZ}}{r_S \cdot \overline{BSE}} = \frac{1}{(1+r_S)^{GR}} \frac{r_D \cdot \overline{BDZ}}{r_S \cdot \overline{BSE}}\,. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Der Anlegungsgrad ist im Beharrungszustand demnach konstant. Diese Konstanz ergibt sich daraus, daß Zähler und Nenner mit der gleichen Rate wachsen. (3.83) kann in zweifacher Hinsicht interpretiert werden. Bei festgelegter Wartezeit tz und Tilgungszeit tt gibt (3.83) den Anlegungsgrad an, den das einschichtige Bausparkollektiv durch die spezielle Wahl von tz und die daraus folgende Tilgungszeit (vgl. Formel (3.52)) erreicht. Die zweite Sicht der Formel (3.83) faßt die Wartezeit tz und damit die Tilgungsdauer tt nicht als gegebene Konstanten auf, sondern betrachtet sie als variabel. Dafür wird der Anlegungsgrad auf eine gewünschte Höhe a fixiert. Durch Lösen der so aufgefaßten Gleichung (3.83) nach tz erhält man gerade die Wartezeit tz , nach der alle Bausparverträge zugeteilt werden müssen, um den Zielanlegungsgrad a im Beharrungszustand zu erreichen. In dieser Interpretation wird (3.83) hier die verallgemeinerte Kassengleichung der Bausparmathematik genannt.

Die Verallgemeinerung gegenüber der klassischen Bausparmathematik besteht darin, daß hier beliebige Zielanlegungsgrade untersucht werden können, während die klassische Bausparmathematik immer nur den ausgeglichenen Fall $a = 1$ betrachtet, der dem idealtypischen Denkmodell des Bausparsystems entspricht.[1]).

Ausführlich geschrieben sieht die verallgemeinerte Kassengleichung folgendermaßen aus:

$$a = \frac{1}{(1+r_S)^{GR}} \frac{r_D \cdot \overline{BDZ}}{r_S \cdot \overline{BSE}} \tag{3.84}$$

$$\Leftrightarrow 0 = r_D \cdot \overline{BDZ} - a \cdot (1+r_S)^{GR} \cdot r_S \cdot \overline{BSE}$$

$$\Leftrightarrow 0 = r_D \cdot [(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}) \frac{(d \cdot y_D)^{tt+1} - 1}{d \cdot y_D - 1}$$

$$- \frac{VT}{d-1} \cdot \frac{y_D^{tt+1} - 1}{y_D - 1} + \frac{TRW_0}{d-w} \cdot \frac{(w \cdot y_D)^{tt+1} - 1}{w \cdot y_D - 1} - BDZ_0]$$

$$- a \cdot (1+r_S)^{GR} \cdot r_S$$

$$\cdot [(1+r_S)^{tz-k} (\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{k-1} + R) \frac{(g \cdot y_S)^{tz-k+GR+1} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1}$$

$$- \frac{SRV}{g-1} \cdot ((1+r_S)^{tz-k} \frac{y_S^{tz-k+1} - y_S}{y_S - 1} + \frac{(g \cdot y_S)^{GR+1} - g \cdot y_S}{g \cdot y_S - 1}$$

$$+ EINMAL \frac{(g \cdot y_S)^{GR+1} - 1}{g \cdot y_S - 1} + R \cdot (1+r_S)^{tz-k}] .$$

Diese Gleichung enthält zwei Größen, die ihrerseits wieder von tz abhängig sind. Das Bruttodarlehen BDZ_0 berechnet sich aus dem Bausparguthaben bei Zuteilung anhand der Formeln (3.20), (3.36), (3.37) als

$$BDZ_0 = (1 + DAMNUM + AGIO)(1 - BSE_{tz+GR}^{SW}) \tag{3.85}$$

$$= (1 + DAMNUM + AGIO)$$

$$\cdot [1 - g^{GR} (SRV \frac{g^{tz-k} - 1}{g-1} + SOFABG^{+} \cdot g^{tz-1} + R \cdot g^{tz-k} + EINMAL)] .$$

Die Tilgungsdauer tt ergibt sich als Lösung der Gleichung (3.52) nach t. Diese Gleichung enthält BDZ_0 und ist somit ebenfalls von tz abhängig.

---

[1]) vgl. z.B. Krahn, A., Technik ..., a.a.O., S.37 f — Laux, H., Grundzüge der Bausparmathematik, a.a.O., S.24 f.

Das Lösen der Kassengleichung (3.84) nach der Wartezeit bis zur Zuteilung tz erfordert also die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems mit den drei Gleichungen (3.84), (3.85) und (3.52) nach den drei Variablen tz, tt und BDZ_0. Durch Einsetzen von (3.85) in die beiden anderen Gleichungen können die Variable BDZ_0 und die Gleichung (3.85) noch aus diesem Lösungsprozeß eliminiert werden.

In 3.1.4.7.2 wurde gezeigt, daß die Bestimmungsgleichung (3.52) für die Tilgungsdauer tt dann explizit nach tt aufgelöst werden kann, wenn auf die Berücksichtigung der Bearbeitungsgebühr *VERGEB* verzichtet wird. In diesem Fall kann durch Einsetzen von tt aus Formel (3.55) in die Kassengleichung (3.84) erreicht werden, daß nur noch eine Gleichung (nämlich (3.84)) nach einer Variablen (nämlich tz) gelöst werden muß. Diese verbleibende Gleichung hat jedoch eine komplizierte Struktur und kann nicht explizit nach tz aufgelöst werden. So muß zur Lösung wieder ein numerisches Verfahren wie das Newton-Verfahren (vgl. 3.1.2) benutzt werden.

Falls die Bearbeitungsgebühr *VERGEB* berücksichtigt werden soll, muß ein System von zwei nichtlinearen Gleichungen ((3.84), (3.52)) in zwei Variablen (tz, tt) numerisch gelöst werden. Als Lösungsverfahren bietet sich hier das mehrdimensionale Newton-Verfahren an, das eine Verallgemeinerung des in 3.1.2 angegebenen Verfahrens ist. Die Konvergenzeigenschaften des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens entsprechen denen des eindimensionalen[1] Verfahrens.

Natürlich können tz und tt auch durch ein Interpolationsverfahren bestimmt werden, wie z.B. Laux[2] es zur Lösung der Kassengleichung benutzt. Dabei wird mit ganzzahligen Werten für tz zunächst die Wartezeit tz' bestimmt, von der ab der Zielanlegungsgrad a (bei Laux immer 1) unterschritten wird. Durch Interpolation wird dann die genaue Lösung bestimmt. Dieses heuristische Verfahren benötigt in der Regel jedoch deutlich mehr Rechenaufwand als das Newton-Verfahren.

3.2.1.5 Die Zuteilung nach der verallgemeinerten Kassengleichung

In Abschnitt 3.1.2 wurde dargelegt, wie der Normalfall der Zuteilung von Bausparverträgen nach einer Zielbewertungszahl mathematisch erfaßt werden kann. Im idealtypischen Denkmodell ist die Zuteilung nach Bewertungszahl jedoch nur das

[1] Stoer, J., Einführung ..., a.a.O., S.197 ff.

[2] vgl. Laux, H., Grundzüge der Bausparmathematik, a.a.O., S.18.

Mittel, um den Beharrungszustand mit dem Anlegungsgrad 1 zu erreichen. Es muß dabei diejenige Zielbewertungszahl gefunden werden, bei der der Zielanlegungsgrad (im theoretischen Denkmodell gleich 1) gerade erreicht wird.

Bei einschichtigen Bausparkollektiven besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Zielbewertungszahl und der Wartezeit bis zur Zuteilung. Da für alle Bausparer identisches Verhalten unterstellt wird, weisen Verträge des gleichen Alters auch gleiche Bewertungszahlen auf. Diese Beziehung gilt natürlich auch in der umgekehrten Richtung. Verträge mit gleicher Bewertungszahl haben das gleiche Alter.

Wegen dieses injektiven Zusammenhanges spielt es bei einschichtigen Bausparkollektiven keine Rolle, ob nach Bewertungszahl oder nach Wartezeit zugeteilt wird. Bei Zuteilung nach Wartezeit kann die notwendige Zielbewertungszahl aus der berechneten Wartezeit abgeleitet werden.

Unter dem Begriff der Zuteilung nach der verallgemeinerten Kassengleichung wird diejenige Zuteilung aller Bausparverträge des Kollektivs verstanden, die die verallgemeinerte Kassengleichung erfüllt. Bei diesem Zuteilungsverfahren wird im Beharrungszustand also der Anlegungsgrad a erreicht. Im Unterschied zur Anlegungsgrad-Zuteilung im Simulationsmodell (vgl. 4.2.1.4) wird hier der Zielanlegungsgrad jedoch erst im Beharrungszustand erreicht, da von Beginn der Kollektiventwicklung mit derjenigen Wartezeit tz (bzw. mit der entsprechenden Zielbewertungszahl BWZIEL) zugeteilt wird, die sich als Lösung der verallgemeinerten Kassengleichung ergibt.

Bei der Zuteilung nach Kassengleichung wird also zunächst die verallgemeinerte Kassengleichung (3.84) numerisch nach tz gelöst. Je nach konkreter Situation muß dabei eines der in 3.2.1.4 beschriebenen Verfahren verwendet werden. Als Ergebnis erhält man in der Regel einen nicht ganzzahligen Wert tz als Wartezeit bis zum Bewertungsstichtag. Das bedeutet, daß die Kassengleichung im diskreten Periodenmodell im allgemeinen nicht erfüllt werden kann. Je nachdem, ob die Lösung tz auf- oder abgerundet wird, wird der Zielanlegungsgrad unter- bzw. überschritten.

3.2.1.6 Die kontinuierliche Version des Formelmodells

Im vorhergehenden Abschnitt wurde deutlich, daß eine Zuteilung nach

Kassengleichung in einem diskreten Periodenmodell nur eingeschränkt möglich ist. Es kann jeweils nur die Periode ermittelt werden, in der der Zielanlegungsgrad a überschritten wird. Um dem im allgemeinen nicht ganzzahligen Lösungswert tz der verallgemeinerten Kassengleichung (3.84) eine sinnvolle Interpretation zu geben, wird hier eine kontinuierliche Version des diskreten Periodenmodells eingeführt.

Neuabschlüsse, Spar- und Tilgungseingang sowie die Zuteilung erfolgen bei dieser kontinuierlichen Version nicht mehr nur zu einem Zeitpunkt in jeder Periode, sondern werden als kontinuierlich angenommen. Mathematisch gesehen bedeutet dieser Prozeß den Grenzübergang $SPER \to \infty$, $DPER \to \infty$, also eine Aufteilung des Kalenderjahres in immer mehr Perioden. In den entsprechenden Formeln für die Bausparguthaben, Bauspardarlehen, Kassenleistung, Sparerleistung, Barwerte usw. ändern sich dadurch lediglich die Verzinsungs- und Abzinsungsfaktoren $g, d, w, v_G, v_D, y_G, y_D$ sowie die Interpretation der Zeitindizes t, tz und tt.

In der Sparphase vollzieht sich die Entwicklung des Bausparguthabens, der Saldensumme und der Sparerleistung mit dem Faktor

$$g^t = [(1 + GUTZIN)^{\frac{1}{SPER}}]^t = (1 + GUTZIN)^{\frac{t}{SPER}} .$$

Der Grenzübergang $SPER \to \infty$ führt dazu, daß der Zeitindex t immer kürzer werdende Perioden wiedergibt. Der Zeitindex t für einen bestimmten Zeitpunkt wird also immer größer. Der Exponent $\frac{t}{SPER}$ bleibt deswegen durch den Grenzübergang unberührt. Der Jahreszinssatz beträgt daher für alle Periodisierungen $GUTZIN$ % . In den Formeln für die Sparphase ist die kontinuierliche Version also bereits implizit enthalten. Setzt man $SPER = 1$, so gibt die Lösung tz der Kassengleichung die Wartezeit bis zum Zuteilungsbewertungsstichtag in Jahren als Dezimalzahl an. Jede andere Wahl von $SPER$ ist ebenso möglich. Etwa für $SPER = 4$ gibt tz die Wartezeit in Quartalen an. Rechnet man diese Zeit in Jahre um, so erhält man exakt die gleiche Zahl, die sich für $SPER = 1$ als Lösung der Kassengleichung (3.81) ergibt. Daß die Formeln der Sparphase im kontinuierlichen Fall unverändert gelten, liegt daran, daß durch die in 3.1.1.2.2 begründete Wahl des Verzinsungsfaktors

$$g = (1 + GUTZIN)^{\frac{1}{SPER}}$$

der Effekt der diskreten Periodeneinteilung bei der Guthabensverzinsung bereits eliminiert wurde.

Anders verhält es sich mit der Darlehensphase. Die Verzinsung wird dort mit

dem Faktor

$$d^t = (1 + \frac{DARZIN}{DPER})^t$$

durchgeführt. Eine Vergrößerung der Periodenzahl *DPER* pro Jahr würde die jährliche Verzinsung beeinflußen. Die Jahresverzinsung beträgt im Modell

$$(1 + \frac{DARZIN}{DPER})^{DPER} . \tag{3.86}$$

Für $DPER = 4$ entspricht dies der Bausparpraxis, denn die Darlehenszinsen werden von allen Bausparkassen quartalsmäßig kapitalisiert. (3.86) ändert sich durch den Grenzübergang $DPER \to \infty$ jedoch. Mit $x = \frac{DPER}{DARZIN}$ gilt:

$$\lim_{DPER \to \infty} (1 + \frac{DARZIN}{DPER})^{DPER} = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^{x \cdot DARZIN} = (\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x)^{DARZIN}$$

$$= e^{DARZIN} .$$

Im Fall stetiger Verzinsung würde ein Darlehenszinssatz von 5 % also zu einer jährlichen Verzinsung mit $e^{0.05} - 1 \approx 5,12\%$ führen, während die quartalsmäßige Abwicklung einem Zinssatz von $(1 + \frac{0,05}{4})^4 - 1 \approx 5,09\%$ entspricht. Dieser Unterschied ist zwar gering, kann jedoch einfach behoben werden. Wählt man

$$\bar{d} = (1 + \frac{DARZIN}{4})^{\frac{4}{DPER}}$$

als Verzinsungsfaktor für die Darlehensphase, so gilt die gleiche Argumentation wie für die Sparphase. Die Verzinsung ist auf den tatsächlichen Quartalsmodus festgelegt und eine Erhöhung der Periodenzahl pro Jahr *DPER* läßt den Exponenten des Ausdrucks

$$\bar{d}^t = (1 + \frac{DARZIN}{4})^{\frac{4 \cdot t}{DPER}}$$

unverändert, da t im gleichen Maß wächst wie *DPER*.

Die Formeln für die Darlehensphase brauchen für diese Version nicht verändert zu werden. Setzt man $DPER = 4$ und interpretiert den im allgemeinen nicht ganzzahligen Wert tt als Tilgungsdauer in Quartalen, so entspricht dies genau der Verzinsung mit $\bar{d}$. Im Gegensatz zur Sparphase muß hier für die kontinuierliche Version also ein bestimmter Wert für *DPER* gewählt werden.

Die oben beschriebene kontinuierliche Version des Formelmodells ermöglicht eine Interpretation auch nicht ganzzahliger Lösungswerte tz und tt des Kassengleichungssystems. So kann für jeden Zielanlegungsgrad a eine Lösung (tz, tt) gefunden werden.

3.2.1.7 Der Zinsüberschuß und die Zinsspanne

Der Zinsüberschuß einer Bausparkasse wird definiert als die Differenz der Erträge und der Aufwendungen des Unternehmens im direkten Zusammenhang mit der Abwicklung des Bauspargeschäfts.

Erträge in diesem Sinne sind im kollektiven Bereich in erster Linie die Darlehenszinsen sowie deren Surrogate in manchen Tarifen: Agien, Disagien und nicht in Anspruch genommene Boni. Die Darlehensgebühr wird ebenfalls in den Zinsüberschuß einbezogen, da sie entsprechend dem Urteil des BFH[1] nicht als reine Kostengebühr angesehen werden kann, sondern den Gewinn der Bausparkasse aus dem Bauspargeschäft erhöht. Die Abschlußgebühr und die Bearbeitungsgebühr werden dem Zinsüberschuß nicht hinzugerechnet, da sie weitgehend kostendeckenden Charakter haben.

Im außerkollektiven Bereich kann die Bausparkasse die nicht in Darlehen angelegte Zuteilungsmasse alternativen Verwendungen zuführen bzw. muß in die Zuteilungsmasse eingeschleuste Mittel auf dem Kapitalmarkt refinanzieren. Die zulässige außerkollektive Anlage von nicht für die Zuteilung verwendeten Mitteln ist im Bausparkassengesetz eingehend geregelt[2]. Sie umfaßt Vor- und Zwischenfinanzierungskredite an Bausparer sowie eine eingeschränkte Anlage der Mittel auf dem Kapitalmarkt. Die verschiedenen Verwendungsmöglichkeiten für die freie Zuteilungsmasse werden hier nicht einzeln berücksichtigt, sondern durch eine Verzinsung der freien Mittel mit einem Zinssatz $AZINS^+$ (außerkollektiver Zins für Anlage von Mitteln) in das Formelmodell einbezogen. Die Aufnahme von Kapitalmarktmitteln zur Stützung der Zuteilungsmasse wird mit dem Zinssatz $AZINS^-$ (außerkollektiver Zins für Aufnahme von Mitteln) verrechnet. Die beiden Zinssätze $AZINS^+$ und $AZINS^-$ können als geeignete Mischzinssätze gewählt werden, die die verschiedenen Anlage- und Aufnahmeformen repräsentieren.

Aufwendungen der Bausparkasse im direkten Zusammenhang mit dem Bauspargeschäft im kollektiven Bereich sind die Guthabenszinsen und Bonuszinsen, die den Bausparkonten gutgeschrieben werden.

---

[1] vgl. BFH-Urteil ..., a.a.O..

[2] Lehmann, W. / Schäfer, O., Bausparkassengesetz und Bausparkassenverordnung, Bonn 1978, § 4 BSpKG, S. 72-90.

Aus Vereinfachungsgründen wird für die folgenden Ertragsberechnungen vorausgesetzt, daß Spar- und Darlehensphase die gleiche Periodisierung $PER = SPER = DPER$ haben.

Der Zinsüberschuß der Bausparkasse setzt sich also aus einer kollektiven Komponente, dem Kollektivertrag KE_t, und einer außerkollektiven Komponente, dem Liquiditätsertrag LE_t, zusammen:

$$ZÜ_t = KE_t + LE_t . \tag{3.87}$$

Der Kollektivertrag ist gemäß den obigen Ausführungen:

$$KE_t = ZD_t + AGIO_t + DISAG_t + BONVER_t + DAMNUM_t - ZG_t - BONZG_t . \tag{3.88}$$

Dabei bezeichnen

ZD_t die Darlehenszinsen

$AGIO_t$ die Erträge aus Agien

$DISAG_t$ die Erträge aus Disagien

$BONVER_t$ die Erträge aus Bonusverzichten

$DAMNUM_t$ die Erträge aus Darlehensgebühren

ZG_t die Guthabenszinsen

$BONZG_t$ die Bonuszinsen

jeweils in der Periode t.

Der Liquiditätsertrag beträgt:

$$LE_t = \begin{cases} \frac{AZINS^+}{PER} \cdot ZUTMAS_t & \text{falls } ZUTMAS_t \geq 0 \\ \frac{AZINS^-}{PER} \cdot ZUTMAS_t & \text{falls } ZUTMAS < 0 . \end{cases} \tag{3.89}$$

Die Zuteilungsmasse besteht definitionsgemäß aus dem Spargeldeingang, den Guthabenszinsen und den reinen Tilgungen einer Periode und dem bisherigen Bestand an freien Mitteln. Daraus kann sofort die bestandsorientierte Berechnungsweise der Zuteilungsmasse abgeleitet werden. Nach Definition gilt für die Zuteilungsmasse und die kollektiven Bestände vor Auszahlung der zugeteilten

Bausparsummen:

$$\begin{aligned} ZUTMAS_t &= ZUTMAS_{t-1} + SPE_t + ZG_t + RT_t \\ BSE_t &= BSE_{t-1} + SPE_t + ZG_t \\ BDZ_t &= BDZ_{t-1} - RT_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \Delta ZUTMAS_t &= ZUTMAS_t - ZUTMAS_{t-1} = SPE_t + ZG_t + RT_t \\ &= \Delta BSE_t - \Delta BDZ_t . \end{aligned}$$

Aus $BSE_1 = SPE_1$ und $BDZ_1 = 0$ folgt $ZUTMAS_1 = BSE_1 - BDZ_1$. Mit der obigen Beziehung folgt daraus allgemein:

$$ZUTMAS_t = BSE_t - BDZ_t . \tag{3.90}$$

Die Zinskomponenten des Zinsüberschusses sind einfach zu berechnen:

$$ZD_t = \frac{DARZIN}{PER} \cdot BDZ_t^E = (d-1) \cdot BDZ_t^E \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned} (ZG_t + BONZG_t) &= [(1 + GUTZIN + BONZIN)^{\frac{1}{PER}} - 1] \cdot BSE_t^E \\ &= (gb - 1) \cdot BSE_t^E . \end{aligned} \tag{3.92}$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Guthabens- und Darlehenszinsen immer von den Größen BDZ_t^E und BSE_t^E zu berechnen sind, unabhängig davon, ob die Spar- und Tilgungseingänge tatsächlich am Periodenende erfolgen oder nicht. Dies hängt mit den bereits in 2.3.3.2 beschriebenen Verzinsungsmodellen der Bausparkassen zusammen. In der Sparphase werden in jeder Periode jeweils nur die Endguthaben der Vorperiode verzinst. Einzahlungen, die während einer Periode eingehen, werden erst ab der nächsten Periode verzinst. Somit wird in der Sparphase die Summe der Perioden-Endguthaben bis zur Periode vor der Zuteilung verzinst. Diese Summe ist gerade die Sparerleistung bei Einzahlungen am Periodenende. Aus diesem Grund berechnen sich die von der Bausparkasse aufzubringenden Guthabenszinsen von den Bauspareinlagen bei Einzahlungen am Quartalsende BSE_t^E. In der Darlehensphase richtet sich der jeweils zu zahlende Zins nach dem Darlehen zu Beginn jeder Periode. Tilgungsleistungen des Sparers werden für die Verzinsung erst zu Beginn der nächsten Periode wirksam. Verzinst wird in der Darlehensphase also die Summe aller Perioden-Anfangsdarlehen einschließlich des Bruttodarlehens. Diese Summe entspricht wiederum gerade der Kassenleistung bei Einzahlungen am Periodenende. Daher ist die Summe der Darlehenszinsen, die der Bausparkasse zufließen, abhängig von den Bauspardarlehen bei Einzahlungen am Periodenende.

Für den einzelnen Sparer ist die Höhe der Verzinsung also relativ unabhängig von seinem Einzahlungsrhythmus. Nur wenn er seine Einzahlungen am Periodenende leistet, entsprechen die Zinsen den tatsächlichen Beständen seines Bausparkontos über die Zeit. Jede Abweichung von diesem Zahlungsrhythmus, egal ob in der Spar- oder in der Darlehensphase, führt dazu, daß die tatsächlichen Bestände zu seinem Nachteil nicht mit der Verzinsung übereinstimmen.

Eine etwas differenziertere Betrachtung ist für die Gebührenkomponenten $AGIO_t$, $DISAG_t$, $BONVER_t$ und $DAMNUM_t$ notwendig. Bereits in 3.1.5.2.3 e) wurde erläutert, warum und wie die bei Zuteilung anfallenden Gebühren und ein nicht in Anspruch genommenes Bonusguthaben abgegrenzt und über die Darlehenslaufzeit verteilt wieder aufgelöst werden. So bestehen die in den Zinsüberschuß eingehenden Gebühren nicht aus den Beträgen, die in einer Periode bei Zuteilung anfallen, sondern aus den Gebührenauflösungen, die für alle in der Darlehensphase befindlichen Bausparer in der jeweiligen Periode vorzunehmen sind.

Die gesamten Auflösungen $AUFL_t$ einer Periode t ergeben sich mit $ABGREN$ und SDZ aus (3.64) und (3.65) also als Summe der individuellen Auflösungen $AUFL_{t,t-\tau}$ der in τ zugeteilten Verträge:

$$AUFL_t = \sum_{\tau=0}^{tt-1} AUFL_{t,t-\tau} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned} AUFL_{t,t-\tau} &= \frac{ABGREN \cdot NVS^D_{t-\tau+1-tzg}}{SDZ \cdot NVS^D_{t-\tau+1-tzg}} \cdot ZD^{SW}_{\tau} \cdot NVS^D_{t-\tau+1-tzg} \\ &= NVS^D_{t-\tau+1-tzg} \cdot \frac{ABGREN}{SDZ} \cdot (d-1) \cdot BDZ^{SW}_{\tau} . \end{aligned} \tag{3.94}$$

Durch Einsetzen von (3.94) in (3.93) erhält man unter Verwendung von (3.65), (3.78), (3.79) und (3.81):

$$\begin{aligned} AUFL_t &= \sum_{\tau=0}^{tt-1} NVS^D_{t-\tau+1-tzg} \cdot \frac{ABGREN}{SDZ}(d-1) \cdot BDZ^{SW}_{\tau} \\ &= \frac{ABGREN}{DARZIN \cdot KL^E_{tt}} \cdot \frac{DARZIN}{DPER} \cdot \sum_{\tau=0}^{tt-1} NVS^D_{t-\tau+1-tzg} \cdot BDZ^{SW}_{\tau} \\ &= \frac{ABGREN}{DPER \cdot KL^E_{tt}} \cdot NVS^D_{t-tzg+1} \cdot \overline{BDZ}^E \\ &= NVS^D_{t-tzg+1} \cdot ABGREN \frac{\overline{BDZ}^E}{DPER \cdot KL^E_{tt}} . \end{aligned} \tag{3.95}$$

Dieses Resultat ist plausibel. Im stationären Beharrungszustand fallen in jeder Periode Auflösungen in der Höhe der gesamten Abgrenzung an, (denn es gilt: $r = 0 \Rightarrow \overline{BDZ}_t^E = DPER \cdot KL_{tt}^E$). Bei nicht konstantem Neugeschäft ($r \neq 0$) beträgt die Auflösung ein dem Wachstum r entsprechendes Vielfaches der Abgrenzung. Außerdem wächst auch die Auflösung wie die Bestände mit der Rate r.

Für den gesamten Zinsüberschuss ergibt sich also folgende Formel, in der zur Vereinfachung der Darstellung angenommen wurde, daß Marktaufnahmezins und Marktanlagezins gleich sind ($AZINS = AZINS^+ = AZINS^-$):

$$
\begin{aligned}
\tilde{ZU}_t &= ZD_t - (ZG_t + BONZG_t) + AUFL_t + \frac{AZINS}{PER} \cdot ZUTMAS_t \qquad (3.96)\\
&= (d-1)BDZ_t^E - (gb-1)\cdot BSE_t^E + NVS_{t-tzg+1}^D \cdot ABGREN \frac{\overline{BDZ}^E}{PER \cdot KL_{tt}^E}\\
&\quad + \frac{AZINS}{PER} \cdot (BSE_t - BDZ_t)\\
&= \left((d-1) - \frac{AZINS}{PER}\right)BDZ_t^E - \left((gb-1) - \frac{AZINS}{PER}\right)BSE_t^E\\
&\quad + NVS_0^D (1+r)^{t-tzg+1}\, ABGREN \frac{\overline{BDZ}^E}{PER \cdot KL_{tt}^E}.
\end{aligned}
$$

Der Begriff der Zinsspanne wird in der Bausparliteratur oft gebraucht, jedoch selten explizit definiert. Im allgemeinen wird unter der Zinsspanne die Differenz zwischen Darlehens- und Guthabenszins verstanden[1]. Aus dieser Definition erklärt sich auch die immer wieder auftauchende Redewendung der zweiprozentigen Zinsspanne der Bausparkassen, denn die Standard-Tarife des deutschen Bausparsystems weisen gerade diese Differenz zwischen Soll- und Habenzins auf.

Außer acht gelassen wird bei dieser Betrachtung z.B. die systematische Verschiebung der so verstandenen Zinsspanne durch die verschiedenen Verzinsungsmodalitäten in der Spar- und in der Darlehensphase. Alle deutschen Bausparkassen kapitalisieren die Guthabenszinsen am Jahresende, die Darlehenszinsen aber bereits zu Quartalsbeginn. Dadurch erhöht sich der Jahreszinssatz z.B. von nominal 5% auf etwa 5,095% und damit die Zinsspanne auf 2,095% . Weitere Erhöhungen der Zinsspanne ergeben sich dadurch, daß

[1] vgl. z.B. Laux, H., Das kollektive Bausparen, a.a.O., S. 86 — Lehmann, W., Die Bausparkassen, Taschenbücher für Geld, Bank und Börse, Band 5, 3. Aufl., Frankfurt/Main, 1965, S.40 — Weber, L., Die öffentlichen Bausparkassen und ihre Bedingungen, 4. Aufl., Sparkassenheft Nr.2, Stuttgart 1961, S.15.

die Darlehenszinsen bei fast allen Bausparkassen vom Quartalsanfangsstand des Darlehens berechnet werden, der in der Regel jedoch durch die monatlichen Tilgungseingänge nur für einen Monat besteht. Der effektive Darlehenszins, der sich durch diesen unterjährigen Effekt ergibt, liegt je nach Höhe des Anfangsdarlehens mehr oder weniger deutlich über dem nominellen Darlehenszinssatz.

Die obigen Darlegungen machen deutlich, daß sich die Differenz zwischen Soll- und Habenzins nicht als Definition für die Zinsspanne eignet. Zu besonders irreführenden Aussagen führt diese Definition bei Tarifvarianten, in denen ein niedrigerer Darlehenszins durch zusätzliche Gebühren wie Agien oder Disagien erkauft wird. Wegen dieser Gründe wird für die Definition der Zinsspanne hier ein anderer Weg beschritten.

Die Zinsspanne wird hier definiert als der Quotient aus dem Zinsüberschuß $ZÜ_t$ und einer geeigneten Bezugsgröße, die das Geschäftsvolumen der Bausparkasse wiedergibt. Somit wird die Zinsspanne hier als der Zinssatz verstanden, der mit dem Kapital des Kollektivs erwirtschaftet wird. Diese Definition darf jedoch aus zwei Gründen nicht mit dem Begriff der Kapitalverzinsung verwechselt werden, die den erzielten Gewinn eines Unternehmens auf das eingesetzte Kapital (also das Eigenkapital) bezieht. Zum einen ist das Eigenkapital der Bausparkassen wie bei allen anderen Geldinstituten im Vergleich zum Geschäftsvolumen gering. Zum anderen ist der oben definierte Zinsüberschuß mit dem betriebswirtschaftlichen Kostendeckungsbeitrag vergleichbar, aus dem der Unternehmensgewinn erst nach Abzug aller nicht produktbezogenen Kosten und aller Steuern hervorgeht.

Als geeignete Meßgröße für das Geschäftsvolumen einer Bausparkasse bieten sich die kollektiven Bestände der Bauspareinlagen bzw. Bauspardarlehen an. Das eigentliche Kapital des Kollektivs sind die Bauspareinlagen. Sie werden entweder in Bauspardarlehen oder als freie Mittel in Vor- und Zwischenfinanzierungskrediten bzw. am Kapitalmarkt angelegt. Falls die Bauspardarlehen die Bauspareinlagen übersteigen, so kann die aus Kapitalmarktmitteln refinanzierte Kreditvergabe, die die Höhe der Bauspareinlagen übersteigt, als außerkollektives Geschäft angesehen werden. Daher wird die Zinsspanne des Bauspargeschäfts hier als Quotient aus dem Zinsüberschuß und den Bauspareinlagen definiert:

$$ZINSPAN_t = \frac{ZÜ_t}{BSE_t}. \tag{3.97}$$

Eine ähnliche Definition benutzt auch Laux zumindest implizit für einige

Analysen[1]. Dort gibt Laux für den Beharrungszustand beim Anlegungsgrad 1 ($\Leftrightarrow BSE = BDZ$) für die Standardtarife eine Zinsspanne von 2% (die Darlehensgebühr wird nicht berücksichtigt) an. Dies ist jedoch nur wegen der nicht ganz korrekten Behandlung der Guthabenszinsen (vgl. Abschnitt 3.1.1.2.2) und der Vernachlässigung der unter Umständen unterschiedlichen Einzahlungsmodi in Spar- und Darlehensphase möglich. Unter Vernachlässigung der abgegrenzten Gebühren ergibt sich beim Anlegungsgrad 1 bereits für den Fall sparerseits optimierter Einzahlungstermine eine Zinsspanne von:

$$ZINSPAN_t = \frac{((d-1)-\frac{AZINS}{PER})BDZ_t^E - ((gb-1)-\frac{AZINS}{PER})BSE_t^E}{BSE_t^E} \tag{3.98}$$

$$= d - gb = (1+\frac{DARZIN}{PER}) - (1+GUTZIN)^{\frac{1}{PER}}$$

$$= \begin{cases} 0,508\% \text{ pro Quartal im } 3\%/5\%\text{-Tarif} \sim 2,03\% \text{ jährlich} \\ 0,506\% \text{ pro Quartal im } 2,5\%/4,5\% \text{ "} \sim 2,02\% \text{ jährlich.} \end{cases}$$

Der Effekt vom Sparer ungünstig gewählter Einzahlungstermine auf die Zinsspanne wird in Teil 6.1.1 genauer untersucht. Bereits hier soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß die Zinsspanne dadurch Werte bis zu 2,8% ohne die Einrechnung der Darlehensgebühr erreichen kann.

An Formel (3.98) kann man dies demonstrieren, indem man von Einzahlungen der Sparer am Periodenbeginn ausgeht. Der Zähler von (3.98) bleibt davon unberührt, denn die Verzinsung der Bauspareinlagen und der Bauspardarlehen ändert sich durch die Verschiebung des Einzahlungstermins nicht. Im Nenner müssen aber die tatsächlichen Bauspareinlagen BSE_t^A eingesetzt werden. Einen Anlegungsgrad von 1 zu erreichen, bedeutet hier, daß $BDZ_t^A = BSE_t^A$ gilt. BDZ_t^A und BSE_t^A unterscheiden sich von BDZ_t^E und BSE_t^E um das Anfangsdarlehen bzw. den letzten Guthabensstand:

$$BSE_t^E = BSE_t^A - BSE_{lz+GR}^S$$

$$BDZ_t^E = BDZ_t^A + BDZ_0 . \tag{3.99}$$

Die Unterschiedsbeträge BDZ_0 und BSE_{lz+GR}^S unterliegen nicht der externen Verzinsung mit $\frac{AZINS}{PER}$, da sie nur für die kollektive Verzinsung zu Buche stehen und nicht in die Liquiditätssituation der Bausparkasse eingehen. Für die Zinsspanne

[1] vgl. z.B. Laux, H., Die Zinsspanne der Bausparkassen bei gleichzeitigem Angebot von 3/5%- und 2,5/4,5%-Bauspartarifen, in: Blätter der DGVM, Bd. XIV, 1979/80, S. 461.

gilt dann also:

$$ZINSPAN_t = \frac{((d-1) - \frac{\Delta ZINS}{PER})BDZ_t^A + (d-1)BDZ_0}{BSE_t^A} + \frac{-((gb-1) - \frac{\Delta ZINS}{PER})BSE_t^A + (gb-1)BSE_{tz+GR}^S}{BSE_t^A} \quad (3.100)$$

$$= (d - gb) + \frac{(d-1)BDZ_0 + (gb-1)BSE_{tz+GR}^S}{BSE_t^A} .$$

Wie hoch der so entstehende Zinsspannenzuschlag ist, hängt offensichtlich vom Verhältnis des letzten Guthabens zur Sparerleistung und des Anfangsdarlehens zur Kassenleistung ab. Je größer diese Verhältnisse, umso höher ist die Zinsspanne. Der Zuschlag zur Zinsspanne ist also umso höher, je schneller eine Sparerschicht abgewickelt wird, denn je weniger Summanden in die Sparer- bzw. Kassenleistung eingehen, umso höher ist der relative Anteil des letzten Guthabens und des Anfangsdarlehens an diesen Größen.

3.2.2 Mehrschichtige Bausparkollektive

3.2.2.1 Zuteilung nach Zielbewertungszahl

Die Berechnung der kollektiven Aggregate eines Bausparkollektivs, das aus mehreren verschiedenen Sparerschichten besteht und dessen Zuteilung über eine Zielbewertungszahl gesteuert werden soll, ist leicht zu bewerkstelligen. Bei der Zuteilung nach Zielbewertungszahl kann jede der Schichten einzeln und unabhängig vom Rest des Kollektivs analysiert werden, da keine Interdependenzen zwischen den Schichten bestehen.

Die Bestände sowie die Strömungsgrößen des gesamten Kollektivs werden aus den entsprechenden für die einzelnen Schichten errechneten Größen ermittelt. Sie ergeben sich jeweils als gewichtete Summen der Werte für die einzelnen Sparerschichten. Die Gewichte sind dabei die Neugeschäftsanteile der einzelnen Sparerschichten.

Die Berechnungsformeln für diese kollektiven Aggregate bringen wegen der einfachen Bildung keine neuen Erkenntnisse und werden hier nicht mehr hingeschrieben. Für numerische Berechnungen ist dies jedoch gleichwohl interessant, da so beliebige Bausparkollektive, die aus vielen Sparerschichten in mehreren Tarifen

zusammengesetzt sein dürfen, untersucht werden können.

3.2.2.2 Zuteilung nach der verallgemeinerten Kassengleichung

In 3.2.1.5 wurde die Zuteilung eines einschichtigen Bausparkollektivs nach der verallgemeinerten Kassengleichung beschrieben. Da zwischen der Wartezeit bis zur Zuteilung tz einer einzelnen Sparerschicht und der dafür notwendigen Zielbewertungszahl ein injektiver Zusammenhang besteht, konnte die Zielbewertungszahl für die Zuteilung einer einzelnen Schicht nach der Kassengleichung außer acht gelassen werden. Sie ergab sich in Abhängigkeit der berechneten Wartezeit tz.

Bei gemischten Kollektiven kann dieser eineindeutige Zusammenhang zwischen Wartezeit und Zielbewertungszahl natürlich nicht mehr bestehen, denn unterschiedliche Sparerschichten erreichen eine bestimmte Zielbewertungszahl $BWZIEL$ im allgemeinen nach verschiedenen Wartezeiten tz^j. Jede sinnvolle Analyse von Bausparkollektiven muß jedoch davon ausgehen, daß alle Sparerschichten mit der gleichen Zielbewertungszahl zugeteilt werden (mit Ausnahme der Fortsetzer, die von sich aus ihren Vertrag über die Erreichung der gemeinsamen Zielbewertungszahl hinaus bestehen lassen). Somit kann die Berechnung der Größen eines gemischten Kollektivs bei Zuteilung nach Kassengleichung nicht wie bei einschichtigen Kollektiven in der Lösung der Kassengleichung nach einer Wartezeit tz bestehen. Es muß vielmehr sichergestellt werden, daß der Zielanlegungsgrad a durch Zuteilung aller Sparerschichten mit der gemeinsamen Bewertungszahl $BWZIEL$ erreicht wird. Dazu müssen für alle Sparerschichten $j \in \{1,\ldots,J\}$ die Wartezeiten tz^j bestimmt werden, bei der die Zielbewertungszahl erreicht wird. Zusätzlich muß die verallgemeinerte Kassengleichung des gemischten Kollektivs erfüllt sein.

Die für die Berechnung der Wartezeit tz^j in Abhängigkeit von $BWZIEL$ jeder Sparerschicht j maßgebliche Gleichung (3.26) wurde in 3.1.2.1 entwickelt. Diese in tz^j nichtlinearen Gleichungen werden hier der Einfachheit halber in der Form

$$BWZIEL = BWZ^j(tz^j) \qquad \text{für } j \in \{1,\ldots,J\} \tag{3.101}$$

benutzt, die der Form (3.23) entspricht. Zusätzlich wird wie bei der Zuteilung eines einschichtigen Bausparkollektivs nach verallgemeinerten Kassengleichung in 3.2.1.5 für jede Sparerschicht die Bestimmungsgleichung (3.52) für die Tilgungsdauer tt^j benötigt. Sie wird hier ebenfalls der Einfachheit halber in der Ansatz-Form

$$BDZ_{tv}^{SW} = 0 \qquad \text{für } j \in \{1,\ldots,J\} \tag{3.102}$$

benutzt.

Die verallgemeinerte Kassengleichung für das gemischte Kollektiv hat dann die Form

$$a \cdot (1 + r_S)^{GR} \cdot \sum_{j=1}^{J} NVS^j \cdot \overline{BSE}^j(tz^j) = r_D \cdot \sum_{j=1}^{J} NVS^j \cdot \overline{BDZ}^j(tz^j, tt^j), \tag{3.103}$$

die entsprechend (3.84) aufgeschlüsselt werden kann. Die NVS^j bezeichnen hierbei die prozentualen Anteile der Sparerschichten am Neugeschäft, die $\overline{BSE}^j$ und $\overline{BDZ}^j$ stammen aus den Formeln (3.75) und (3.79) in Verbindung mit (3.80) und (3.81) für jede Sparerschicht $j \in \{1,\ldots,J\}$.

Das gesamte System für die Zuteilung des Bausparkollektivs nach der verallgemeinerten Kassengleichung besteht also aus den nichtlinearen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} (3.103) & a \cdot (1 + r_S)^{GR} \cdot \sum_{j=1}^{J} NVS^j \ \overline{BSE}^j(tz^j) = r_D \cdot \sum_{j=1}^{J} NVS^j \cdot \overline{BDZ}^j(tz^j, tt^j) \\ (3.101) & BWZIEL = BWZ^j(tz^j) \\ (3.102) & BDZ_{tv}^{SW} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{für } j \in \{1,\ldots,J\}$$

in den Variablen

$$BWZIEL,\ tz^1,\ldots,tz^J,\ tt^1,\ldots,\ tt^J.$$

Es handelt sich also um ein nichtlineares System von $2 \cdot J + 1$ Gleichungen in $2 \cdot J + 1$ Variablen. Die Lösung dieses Systems kann z.B. wieder mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren berechnet werden (vgl. 3.2.1.5), falls überhaupt eine eindeutige Lösung des Systems existiert.

Als Fazit dieses Abschnittes kann also festgehalten werden, daß die Zuteilung eines mehrschichtigen Bausparkollektivs nach der verallgemeinerten Kassengleichung auf ein numerisch durchaus nicht triviales Problem führt. Durch die gemeinsame Zuteilung aller Schichten nach einer zu ermittelnden Zielbewertungszahl entsteht eine Interdependenz zwischen den Sparerschichten, die sich gerade in der Kassengleichung (3.103) ausdrückt.

Sparerschichten, die unabhängig von der zu ermittelnden Zielbewertungszahl sind, führen natürlich nicht zu einer Erweiterung des Gleichungssystems. Solche Sparerschichten sind z.B. Kündiger, die ihre Bausparverträge bei Erreichen eines

bestimmten Anspargrades kündigen, der unabhängig von der Zielbewertungszahl ist. Auch Fortsetzer können häufig als unabhängig von der Zielbewertungszahl angesehen werden. Sie machen ihre Rechte aus der Zuteilung oft zu einem Zeitpunkt wieder geltend, der hauptsächlich von außerkollektiven Gründen wie z.B. dem Fortschritt bei ihrem Hausbau-Projekt abhängt. Die Bestände dieser Sparerschichten an Bauspareinlagen und Bauspardarlehen können als "Bodensatz" auf der linken und rechten Seite der Kassengleichung berücksichtigt werden. Dadurch werden im System weder neue Variable noch Gleichungen eingeführt, da die Wartezeiten dieser Schichten bis zur Zuteilung oder bis zum Ausscheiden aus dem Kollektiv (bei den Kündigern) von vornherein feststehen.

Auch Darlehensverzichter in einer Sparerschicht, die sich bis zur Zuteilung genauso verhalten wie die Darlehensnehmer, können ohne eine Erweiterung des Systems berücksichtigt werden. Dies geschieht dadurch, daß bei der betreffenden Sparerschicht j der Bauspardarlehensbestand $\overline{BDZ}^j$ auf der rechten Seite der Kassengleichung (3.103) mit dem Faktor $(1 - dv^j)$ multipliziert wird. dv^j ist dabei der prozentuale Anteil der Darlehensverzichter am Neuabschlußvolumen der entsprechenden Sparerschicht j. Diese Behandlung der Darlehensverzichte nimmt auch Laux in seinem bausparmathematischen Gesamtmodell vor. Kündigungen und Fortsetzungen berücksichtigt er etwas anders[1].

[1] vgl. Laux, H., Grundzüge ..., a.a.O., S. 43 – 66.

Teil 4

Das Simulationsmodell

In diesem Teil wird ein Simulationsmodell in Form eines Schichtenmodells zur Abbildung von Bausparprozessen vorgestellt. In 4.1 wird die Form des Modellansatzes begründet und die prinzipielle Funktionsweise des Simulationsmodells erläutert. In 4.2 ist der Aufbau des Modells dargelegt. Teil 4.3 befaßt sich mit der Abbildung von Bauspartarifen und verschiedenen Sparverhalten im Simulationsmodell.

4.1 Begründung und Erläuterung des Modellansatzes

Simulationsmodelle bilden den zu untersuchenden Sachverhalt in seinem sachlichen und zeitlichen Ablauf nach. Auf diese Weise kann eine reale Situation in all ihren Aspekten erfaßt werden. Der Abstraktionsgrad der modellmäßigen Abbildung eines realen Systems durch ein Simulationsmodell ist also gering. Aus diesem Grund sind Simulationsmodelle als Analyseinstrumente besonders für Systeme geeignet, die wegen ihrer Kompliziertheit nur unzureichend oder gar nicht durch ein stärker von der Realität abstrahierendes mathematisch-theoretisches Modell erfaßt werden können.

In Teil 3 wurde ein mathematisch-theoretisch orientiertes Formelmodell für die Erfassung des realen Systems Bausparkollektiv entwickelt. Seine Vorzüge gegenüber einem Simulationsmodell liegen vor allem in der expliziten Darstellung bauspartechnischer Größen als Funktion ihrer Einflußgrößen. Diese Form der Darstellung ermöglicht das Erkennen theoretischer Gesetzmäßigkeiten in den praktischen Abläufen von Bausparkollektiven.

Diese Eigenschaft bringt jedoch nur dann Vorteile gegenüber einem ablauforientierten Simulationsmodell, wenn das resultierende Formelsystem so gestaltet ist, daß die theoretischen Gesetzmäßigkeiten in evidenter Form abgeleitet werden können. Unter diesem Aspekt stellen bereits die im dritten Teil dieser Arbeit hergeleiteten Formeln erhebliche Ansprüche an eine diesbezügliche Interpretation. Formeln wie die Bestimmungsgleichung für die Wartezeit bis zur Zuteilung (3.26) oder die verallgemeinerte Kassengleichung (3.84) sind bereits so komplex, daß Einsichten in die Wirkungszusammenhänge nur schwierig zu gewinnen sind, zumal diese Gleichungen die interessierenden Variablen (Wartezeit bis zur Zuteilung) nicht explizit, sondern nur implizit definieren.

Das Formelmodell kann trotz seines bereits relativ komplizierten Aufbaus nur zur Bearbeitung bestimmter Gruppen von bauspartechnischen Fragestellungen herangezogen werden. Es eignet sich, wie im letzten Teil dargelegt, hauptsächlich zur Analyse des Beharrungszustandes einschichtiger Bausparkollektive, d. h. von Bausparkollektiven, die ausschließlich aus Bausparverträgen bestehen, die identisch abgewickelt werden. Im Teil 3.2 wurde erläutert, wie das Formelmodell auch für mehrschichtige Kollektive angewendet werden kann. Diese Form der Anwendung hat jedoch vorwiegend rechnerischen Charakter, die Formeln geben für die theoretische Analyse nicht mehr viel her.

Von größerer Bedeutung für die praktische Verwendbarkeit ist die Einschränkung des Formelmodells auf die Untersuchung des Beharrungszustandes von Bausparkollektiven. Reale Bausparkollektive erreichen in der Praxis keinen Beharrungszustand, da zum einen die Neugeschäftsentwicklung in der Regel kein durchgängiges exponentielles Wachstum aufweist und zum anderen die Voraussetzung identisch abgewickelter Bausparverträge nicht erfüllt ist. Wegen dieser Gründe können die Ergebnisse von Analysen, die mit einem Formelmodell ausgeführt werden, immer nur bedingt und unter gewissen Voraussetzungen auf reale Bausparkollektive übertragen werden.

Bislang beschränkten sich bausparmathematische Untersuchungen im wesentlichen auf die Analyse von Beharrungszuständen bzw. die Abbildung von Anlaufeffekten neuer Bausparkollektive[1]. Entweder wurde auf die Einbindung konkreter realer Umstände bewußt verzichtet oder es wurde unterstellt, daß sich reale Bausparkollektive genügend gut durch Beharrungszustände abbilden lassen.[2]

In Teil 6 dieser Arbeit wird noch zu zeigen sein, daß gerade Übergänge von einem Beharrungszustand in einen qualitativ anderen extreme Situationen bezüglich Liquidität und Ertrag für eine Bausparkasse mit sich bringen. Aus diesem Grund haben bauspartechnische Fragestellungen meist zwei Aspekte. Auf der einen Seite interessieren die grundsätzlichen qualitativen Eigenschaften der Untersuchungsobjekte, auf der anderen Seite sollte eine Verbindung geschaffen werden zwischen diesen Untersuchungsobjekten und den realen Bausparkollektiven, die sie betreffen.

---

[1] vgl. z.B. Heubeck, G., Beiträge ..., a.a.O., S. 21 – 36 — Vajda, S., Der derzeitige Stand ..., a.a.O..

[2] vgl. z.B. Laux, H., Grundzüge ..., a.a.O., S. 71.

Ein einleuchtendes Beispiel für diesen Zusammenhang ist die Situation, mit der sich nahezu alle deutschen Bausparkassen in den letzten Jahren durch die Einführung neuer Bauspartarife konfrontiert sahen. Die Einführung neuer Tarife in die bestehenden Bausparkollektive hat den Bausparkassen auf der einen Seite zusätzliches Geschäft gebracht, zum anderen aber auch Neuabschlüsse in den alten Tarifen substituiert. Insofern können die neu eingeführten Bauspartarife nicht isoliert von den alten Kollektiven betrachtet werden, selbst wenn sie wie in einigen Fällen in getrennten Zuteilungsmassen geführt werden und somit an sich eigenständige Kollektive bilden.

An neu einzuführende Bauspartarife sind zwei grundsätzliche Anforderungen zu stellen. Zum einen müssen sie in sich funktionsfähig sein. Zur Überprüfung dieses Punktes sind Formelmodelle hervorragend geeignet, da sie die Besonderheiten von Bauspartarifen explizit herauszuarbeiten vermögen. Zum anderen muß aber gewährleistet werden, daß die Substitution von Neuabschlüssen in den bisherigen Tarifen durch die in Frage kommenden neuen Tarife im realen Bausparkollektiv liquiditäts- und ertragsmäßig überhaupt verkraftet werden kann. Diese Fragestellung wird im folgenden mit dem Begriff "Übergangsproblematik" bezeichnet.

Die Langzeittarife, die in den letzten Jahren eingeführt wurden, haben prinzipiell stabilisierende Wirkungen auf die Liquiditätslage von Bausparkollektiven. Dennoch bergen sie zwei Faktoren, die ernstzunehmende Übergangsprobleme implizieren können. Die Liquiditätslage des Bausparkollektivs verschlechtert sich in den ersten Jahren nach Einführung dieser Langzeittarife durch den gegenüber den alten Tarifen reduzierten Spargeldeingang. Die Ertragslage verschlechtert sich in den ersten Jahren neben den durch die angespannte Liquidität induzierten Einbußen zusätzlich durch die deutlich höhere Guthabenverzinsung der Langzeittarife gegenuber den Standardtarifen (4% bis 4,5% gegenüber 2,5% bzw. 3%). Diese beiden Effekte klingen erst dann langsam wieder ab, wenn die neu eingeführten Tarife das Darlehensstadium erreichen bzw. wenn die Sparerschichten, die durch die Langzeittarife im Kollektiv substituiert wurden, zur Zuteilung gelangen würden. (vgl. 6.1.2).

Solche Übergangseffekte ließen sich theoretisch mit einem Formelmodell ebenfalls erfassen. Die resultierenden Formeln würden jedoch so lang und kompliziert, daß sie nicht mehr nachvollziehbar wären. Außerdem müßten sie für jeden zu un-

tersuchenden Fall wieder neu entwickelt werden. Zur modellmäßigen Abbildung solcher Situationen sind dagegen Simulationsmodelle besonders geeignet. Mit einem Simulationsmodell lassen sich die realen Abläufe in Bausparkollektiven wirklichkeitsgetreu nachbilden.

Der Unterschied zu ökonometrischen Modellen, die sich ebenfalls für Simulationsrechnungen eignen, liegt darin, daß zur Abbildung der Vorgänge im Bausparkollektiv keine statistischen Verhaltensgleichungen verwendet werden, sondern die weitgehend deterministische Struktur der Spar- und Tilgungsverhalten einzelner Sparerschichten ausgenutzt wird. In ökonometrischen Modellen muß zunächst durch geeignete Spezifikation der Modellgleichungen und Schätzung deren Parameter der innere Zusammenhang des betrachteten Systems erfaßt und abgebildet werden. Da diese Zusammenhänge für das System 'Bausparkollektiv' jedoch bekannt sind, impliziert der Ansatz von Verhaltensgleichungen in ökonometrischen Modellen die Weglassung vorhandener Information und ist deswegen sicher nicht der optimale Modellierungsansatz (vgl. auch 5.1.2).

Aus den angeführten Gründen wird in diesem Teil der Arbeit ein Simulationsmodell für Bausparkollektive vorgestellt. Alle in diesem Teil und in Teil 6 angeführten Simulationsergebnisse wurden mit diesem Modell berechnet.

Das Simulationsmodell hat die spezielle Struktur eines Schichtenmodells auf Quartalsbasis. Grundlage der Simulation ist die Einteilung des Neuabschlußvolumens des Bausparkollektivs in Sparerschichten. Daraus ergibt sich eine entsprechende Schichtung der Vertragsbestände. Zu Beginn der Simulationsrechnung werden die einzubeziehenden Sparerschichten definiert, ihre spezifischen Merkmale werden festgelegt und die prozentualen Anteile dieser Schichten am Neuabschlußvolumen werden gewählt.

Für die definierten Sparerschichten werden Konten angelegt, die neben den Bestandsdaten eine Vielzahl von zusätzlichen Informationen enthalten, die der statistischen Auswertung der Simulation dienen. Diese Konten werden während der Simulation entsprechend den Vorgaben fortgeschrieben und wie in der Realität abgewickelt. Dabei werden die Daten der einzelnen Schichtenkonten in jeder Phase der Simulation zu einer Reihe von wichtigen Kollektivkenngrößen in Form von Zeitreihen aggregiert. Diese können im Anschluß an die Simulationsrechnung zusammen mit einer Schichtenstatistik ausgegeben werden. Bei der Simulation wird eine Reihe von sparerschichtenübergreifenden globalen Vorgaben mitein-

bezogen, die z. B. die Neugeschäftsentwicklung und die Berechnung des kollektiven Zinsüberschusses (Deckungsbeitrag aus dem Bauspargeschäft) betreffen.

Die prinzipielle Funktionsweise des Simulationsmodells läßt sich also folgendermaßen veranschaulichen:

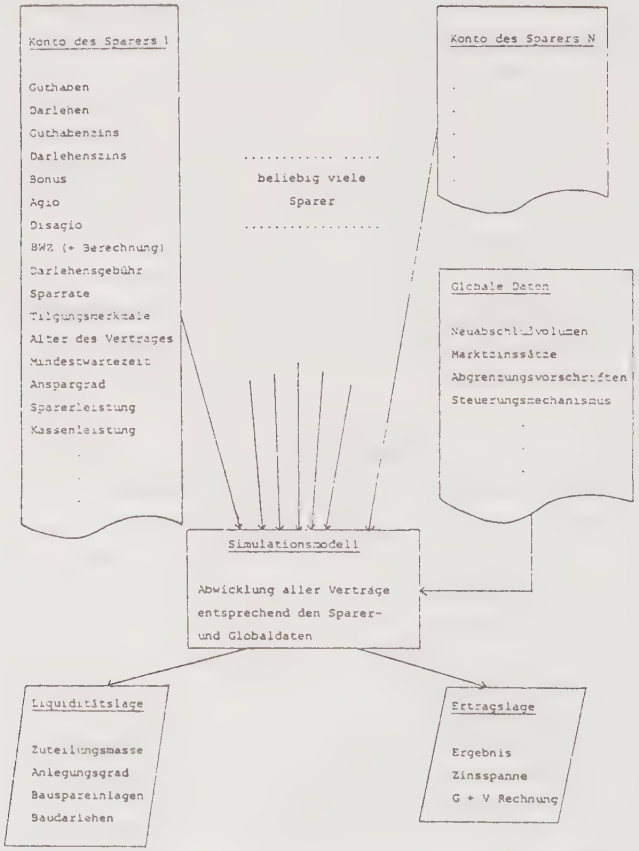

Abb. 4.I: Die prinzipielle Funktionsweise des Simulationsmodells

4.2 Der Aufbau des Simulationsmodells

Für die Abbildung des realen Bauspargeschehens im Simulationsmodell wird unterstellt, daß Bausparkollektive grundsätzlich durch Schichtenstrukturen so beschrieben werden können, daß die Modellergebnisse nur geringfügig von den entsprechenden realen Kollektiven abweichen. Im Modell werden ausschließlich die zuvor definierten Bausparerschichten betrachtet. Typische Schichten, die zur Simulation herangezogen werden, sind z. B. Ratensparerschichten mit verschiedenen Sparraten, Soforteinzahlerschichten, Kündigerschichten usw. (vgl. 4.3).

Durch die Einbeziehung ausreichend vieler Schichten kann die Realität beliebig genau angenähert werden, falls die Zusammensetzung eines realen Bestandes bekannt ist. Die Auswahl der Sparerschichten, die in eine Simulation einbezogen werden und deren prozentuale Zusammensetzung sind die wesentlichen Determinanten der Simulationsergebnisse. Insofern kommt dieser Auswahl für die Erstellung realitätsnaher Simulationsrechnungen entscheidende Bedeutung zu.

Durch Einbeziehung von immer mehr Sparerschichten in eine Simulation wird das Abbild der Realität zwar immer wirklichkeitsgetreuer. Der Rechenaufwand steigt dadurch jedoch wesentlich an und die Simulationsergebnisse werden durch eine Vielzahl von Effekten beeinflußt, die ihre Interpretation stark verkomplizieren. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die zahlreichen in der Realität auftretenden individuellen Spar- und Tilgungsverhalten so in Gruppen zusammenzufassen, daß auf der einen Seite das Kollektiv der Simulation überschaubar bleibt und daß auf der anderen Seite durch diese Clusterung keine wesentlichen Merkmale des realen Bausparkollektivs vernachlässigt werden.

Das Konzept der Schichtenzusammensetzung eines Bausparkollektivs muß in einem Ablaufmodell sinnvollerweise auf das Neugeschäft bezogen sein. Als Vorgabe erhält das Simulationsmodell die Höhe des Neugeschäfts in jedem Quartal des zu betrachtenden Zeithorizontes und die jeweilige Zusammensetzung dieser Abschlußvolumina aus verschiedenen Sparerschichten. Jede Schicht eines jeden Abschlußjahrganges wird als eine Einheit betrachtet. Es wird unterstellt, daß alle Bausparverträge, aus denen diese Schicht besteht, identisch bespart und getilgt werden. Im Simulationsmodell wird dementsprechend für jede Sparerschicht in

jedem Abschlußquartal ein Bausparkonto angelegt, das über die Vertragssumme der gesamten Schicht lautet. Dieses Konto wird während der Simulation entsprechend den Vorgaben abgewickelt.

Der zeitliche Ablauf dieser Kontenabwicklung ist der Bausparpraxis exakt nachgebildet. Die monatlichen Sparbeiträge erbringen die simulierten Sparer jeweils am Quartalsanfang. Die Höhe der monatlichen Sparrate kann im Simulationsmodell zusätzlich von der Entwicklung des Marktzinses für Geldanlagen abhängig gemacht werden. Dahinter steht die Überlegung, daß die Bereitschaft von Bausparern, ihr freies Kapital auf Bausparverträge einzuzahlen, auch von der Höhe der Verzinsung alternativer Anlageformen abhängt. Je höher die Verzinsung für Sparkonten, Schatzbriefe, Bundesobligationen usw. ist, umso weniger werden Bausparer, die nicht zielstrebig auf eine Zuteilung hin sparen, ihre freien Mittel auf niedrig verzinslichen Bausparkonten anlegen. Aus diesem Grund kann für jede Sparerschicht im Simulationsmodell festgelegt werden, wie stark sich eine Änderung des Marktzinses für Geldanlagen auf die Sparbeiträge auswirken soll.

Die Bewertungszahl der Bausparerschichten wird prinzipiell nach Formel (3.23) berechnet. Wegen deren Allgemeinheit können mit dem Simulationsmodell alle praktizierten Bewertungsverfahren nachvollzogen werden. Einige neue Tarife des deutschen Bausparsystems bewerten das über den Mindestanspargrad von 50% hinausgehende Guthaben nur noch zur Hälfte. Diese Möglichkeit ist im Simulationsmodell so verallgemeinert worden, daß die reduzierte Bewertung in Form eines eigenen Faktors beliebig wählbar ist. Zusätzlich ist der Anspargrad flexibel, ab dem die reduzierte Bewertung angewendet wird.

Das Simulationsmodell sieht drei Möglichkeiten der Zuteilung vor. Ein Sparer kann zugeteilt werden, wenn sein Vertrag ein bestimmtes Alter erreicht hat, unabhängig von sonstigen Bedingungen. Dieser Fall kommt in der Bausparpraxis so nicht vor und dient hier der grundsätzlichen Analyse von Bauspartarifen. Im Normalfall wird ein Sparer zugeteilt, wenn sein Vertrag die für das aktuelle Quartal gültige Zielbewertungszahl erreicht hat. Die in einem Quartal für die Sparerschicht gültige Zielbewertungszahl ergibt sich aus einer vorwählbaren Zeitreihe, die für jedes Quartal eine kollektive Zielbewertungszahl angibt. Das dritte Zuteilungsverfahren ist die Anlegungsgradsteuerung. Ziel der Anlegungsgradsteuerung ist es, daß der kollektive Anlegungsgrad in jedem Quartal möglichst nahe an einen vorgegebenen Zielanlegungsgrad herankommt. Diese Aufgabe stellt sich den Bausparkassen

auch in der Praxis. Die Schwierigkeiten dieses Problems liegen darin, daß heute zugesagte Zuteilungen erst die Liquidität folgender Quartale belasten, in denen auch wieder eingehende Spargelder und Tilgungen die Liquiditätslage entlasten. Da der Geldeingang der folgenden Quartale in der Praxis höchstens grob vorausgeschätzt werden kann, ist eine genaue Liquiditäts- und Anlegungsgradplanung dort kaum möglich.

Im Simulationsmodell wird das Verhalten der Sparer schon mit ihren Definitionen festgelegt. Daher kann im Simulationsmodell unter Berücksichtigung der zukünftigen Geldeingänge eine ziemlich exakte Anlegungsgradsteuerung durchgeführt werden. Dazu werden in jedem Zuteilungszeitpunkt zunächst alle die Schichten zugeteilt, die nicht der Anlegungsgradsteuerung unterliegen. Liegt der kollektive Anlegungsgrad nach diesen Zuteilungen noch unter dem Zielanlegungsgrad, so werden aus der Liste der zuteilungsreifen Verträge (vertragliche Mindestbedingungen sind erfüllt) solange diejenigen mit der jeweils höchsten Bewertungszahl zugeteilt, bis der Zielanlegungsgrad erreicht ist. Die Überprüfung, ob der einzelne Vertrag, der innerhalb der Liste gerade bearbeitet wird, noch zugeteilt werden kann oder nicht, läuft folgendermaßen ab. Es wird zunächst anhand der Werte GR und DR für die Schicht, der der Vertrag entstammt, festgestellt, in welchen Quartalen der kollektive Anlegungsgrad durch eine Zuteilung des Vertrages verändert würde. Befindet sich die Simulation im Quartal i, so würde der Bestand an Bauspareinlagen im Quartal $i+GR$ um das Bausparguthaben des betrachteten Vertrages reduziert, der Bauspardarlehensbestand im Quartal $i+GR+DR$ um das auszahlende Darlehen erhöht. Ob dieser Vertrag im aktuellen Quartal unter dem Gesichtspunkt Zielanlegungsgrad zugeteilt werden kann oder nicht, muß also aufgrund der Anlegungsgrade in den zukünftigen Quartalen $i+GR$ und $i+GR+DR$ entschieden werden.

Mit der Zuteilung verbunden sind zwei mögliche Sonderzahlungen eines Bausparers, die Auffüllung vor Zuteilung und die Zuzahlung vor Zuteilung. Diese beiden lokalen Größen definieren jeweils einen Prozentsatz der Vertragssumme, den zu zahlen ein bislang noch nicht für die Zuteilung vorgemerkter Sparer bereit ist, falls er damit die Zuteilung seines Vertrages im aktuellen Quartal erreichen kann. Auffüllung und Zuzahlung unterscheiden sich lediglich dadurch, daß die Auffüllung nur erbracht wird, um den vertraglichen Mindestanspargrad zu erreichen, während die Zuzahlung auch geleistet wird, um die Zielbewertungszahl zu er-

reichen. In beiden Fällen ist eines der drei Kriterien für die Zuteilung noch nicht erfüllt. Der Auffüller ist nicht bereit, eine Schmälerung seines maximal möglichen Darlehensanspruches für die Zuteilung hinzunehmen. Er erbringt seine Auffüllung nur dann, wenn die Zielbewertungszahl damit ohnehin erreicht ist. Die Auffüllung ist also ein Spezialfall des allgemeineren Phänomens Zuzahlung.

Auffüll- und Zuzahlbereitschaft einer Sparerschicht können auch an externe Rahmenbedingungen wie z. B. den Marktzins gebunden werden. Lehnt man ihre zeitliche Entwicklung an den Marktzinssatz für Kapitalaufnahme an, so bindet man den in der Praxis beobachteten Effekt in die Simulation mit ein, daß z. B. höhere Hypothekenzinsen die Nachfrage nach zinsgünstigen Bauspardarlehen und damit die Bereitschaft steigert, freies Kapital zur Zuzahlung auf Bausparverträge zu verwenden.

4.3 Die Abbildung verschiedener Bauspartarife und Sparverhalten im Simulationsmodell

In der Bausparpraxis schließt ein Bausparer seinen Vertrag in einem bestimmten Tarif ab. Der Gesamtbestand einer realen Bausparkasse ist also aus einzelnen Tarifbeständen zusammengesetzt. Im Simulationsmodell ist diese strenge Gruppeneinteilung nicht realisiert. Der Tarif, in dem eine Sparerschicht spart, wird durch die für sie individuell gesetzten Definitionsparameter bestimmt. Theoretisch könnte also für jede Sparerschicht ein eigener Tarif berücksichtigt werden. Die Einteilung der Sparerschichten in Tarife wird also nicht vom Modell vorgenommen, sondern durch die Schichtendefinition vorgegeben. Die nachfolgend beschriebenen Tarife können durch geeignete Definitionen im Simulationsmodell abgebildet werden.

Alle deutschen Bausparkassen führen die sogenannten Standardtarife, den Hochzins- und den Niedrigzins-Standardtarif. Der Hochzins-Standardtarif hat einen Guthabenszinssatz von 3 % und einen Darlehenszinssatz von 5 %. Im Niedrigzins-Standardtarif sind die entsprechenden Zinssätze 2,5 % und 4,5 %. Die in den ABB festgelegten Regelsparbeiträge betragen in beiden Tarifen 0,1 bis 0,5 % monatlich, die Regeltilgungsbeiträge 0,5 bis 0,6 % monatlich. Die Abschlußgebühr liegt bei 1 % bzw. 1,6 % (bei einigen Bausparkassen für den Niedrigzinstarif), die Darlehensgebühr beträgt 2 %. Der Mindestanspargrad ist 40 % der Bausparsumme, die Mindestwartezeit beträgt 6 Quartale. Als Varianten der Standard-Tarife gibt es

die Disagiovarianten, bei denen ein um bis zu ein Prozent niedrigerer Darlehenszins mit einem Disagio von bis zu 5 % erkauft wird.

Schnellspartarife werden von einigen privaten Bausparkassen bereits sehr lange angeboten (z.B. Tarif III der Bausparkasse Gemeinschaft der Freunde Wüstenrot). Ein größerer Teil der privaten und öffentlichen Bausparkasssen führte solche Tarife jedoch erst im Lauf der Jahre 1981/82 ein. Die Schnellspartarife zeichnen sich gegenüber den Standardtarifen durch höhere Regelsparbeiträge und Tilgungsbeiträge aus, die zusammen mit einer beschleunigten Bewertungszahlenentwicklung eine schnellere Zuteilung und Abwicklung ermöglichen. Der Mindestanspargrad beträgt für diese Tarife bei allen Bausparkassen 50 % gegenüber 40 % bei den Standardtarifen. Als weiteres charakteristisches Merkmal, das jedoch nicht von allen Bausparkassen angeboten wird, garantieren diese Tarife dem Bausparer teilweise einen festen Darlehensanspruch von 50 % der Vertragssumme. Bei einigen Bausparkassen (hauptsächlich den öffentlichen) sind diese Tarife mit einem Agio versehen. Die Schnellspartarife kommen ebenfalls als Hochzinsvarianten und Niedrigzinsvarianten mit Guthabenszinsen in Höhe von 3 % bzw. 2,5 % vor.

Im Herbst 1981 brachte die Bausparkasse Gesellschaft der Freunde Wüstenrot einen Langzeittarif auf den Bausparmarkt, der sich in drei Merkmalen wesentlich von der bisherigen Tariflandschaft unterschied. Der Guthabenszinssatz beträgt 4 % und liegt damit näher am Spareckzins als die sonst vergleichsweise niedrige Verzinsung von Bausparguthaben. Dementsprechend ist der Darlehenszins mit 5,5% höher als in anderen Bauspartarifen und außerdem hat der Tarif ein Disagio von 2,5 % der Bausparsumme (bzw. 5 % des auf 50 % der Vertragssumme fixierten Bauspardarlehens). Eine Regelsparrate von 0.3 % und eine Stufentilgung mit 0,35 % in den ersten vier Jahren, 0,4 % in den darauf folgenden vier Jahren und 0,5 % bis zur endgültigen Tilgung qualifizieren diesen Tarif als ausgesprochenen Langzeittarif. Die Abschlußgebühr wird in diesem Tarif nicht mehr zu Beginn der Sparphase erhoben, sondern in vier Raten zu je 25 % jeweils zu Beginn der ersten vier Kalenderjahre nach Vertragsabschluß . Die meisten deutschen Bausparkassen reagierten in der durch den starken Neugeschäftseinbruch in den Jahren 1981/82 bedingten, angespannten Marktlage mit der Einführung ähnlicher Langzeittarife. Im Zuge dieser Veränderung der Tariflandschaft entstanden bei einigen Kassen auch die Optionstarife, die dem Bausparer im Zeitpunkt der

Zuteilung die Entscheidung lassen, ob er durch die Auszahlung eines gesondert angesammelten Bonus die Hochzinsvariante oder durch einen Verzicht auf diese Auszahlung die Niedrigzinsvariante wählen will.

Unter dem Begriff Universaltarif werden hier nicht die von einigen Bausparkassen schon seit langem so genannten Standardtarife verstanden, sondern eine neue Tarifform, die 1982 erstmalig von der Bausparkasse MAINZ AG als Tarif D auf den Bausparmarkt gebracht wurde. Dieser Tarif ist so konstruiert, daß in ihm jede Form des Sparens sinnvoll darstellbar ist. Er beherbergt also Standardtarife, Schnellspartarife und Langzeittarife gewissermaßen unter einem Dach. In den spezialisierten Tarifen anderer Bausparkassen ist zwar ein nicht tarifgemäßes Sparverhalten möglich, wegen der fixierten Tilgungsbeiträge aber meist nicht sinnvoll. Die wesentliche Neuerung in der Tarifgestaltung, die Schnell- wie Langsamsparprozesse in diesem Tarif gleichermaßen sinnvoll machen, ist die variable Gestaltung des monatlichen Regeltilgungsbeitrages. Dieser variiert mit der Höhe der individuellen Bewertungsziffer bei Zuteilung zwischen 0,033 % und 0.06 % monatlich. Je höher die Bewertungsziffer, umso niedriger ist die anfängliche Tilgungsrate, die in der Darlehensphase zu Beginn jedes Kalenderjahres um 5 % erhöht wird. Die Erfassung aller sinnvollen Sparverhalten durch die Annuitätentabelle ist so gestaltet, daß ein 0,4 %- Ratensparer die niedrigste Anfangstilgungsrate erhält, während ein 0,8 %-Ratensparer die höchste Rate erbringen muß . Bei diesen Eckwerten für die Höhe der monatlichen Sparrate nimmt die Bewertungsziffer bei Erreichen des vertraglichen Mindestanspargrades von 50 % gerade die obere bzw. untere Grenze der Bewertungsziffernskala in der Annuitätentabelle an. Diese Tarifkonstruktion birgt gewisse Risiken in sich, die in Teil 6 genauer untersucht werden. Durch einen Bonus, für den der Bausparer optieren kann, gibt es diesen Tarif auch in einer Hochzins- und Niedrigzinsvariante.

Im folgenden werden spezielle Sparerschichten erläutert, die im Simulationsmodell innerhalb aller Tarife abgebildet werden können.

Ratensparer sind Sparer, die regelmäßig konstante Sparbeiträge erbringen. Regelsparer leisten Spareinzahlungen, die den in den jeweiligen ABB vorgesehenen Sparleistungen entsprechen. Mit dem Begriff Regelsparer ist also kein konkretes Ansparverhalten in Form einer bestimmten Sparrate verbunden. Dementsprechend bezeichnet der Typ Überregelsparer Sparerschichten, deren regelmäßige Sparbeiträge über dem Regelsparbeitrag liegen. In der

Bausparpraxis werden regelmäßige Sparraten in verschiedenen Höhen relativ zur Regelansparung beobachtet. Insofern ist der Begriff Überregelsparer ein Oberbegriff für viele mögliche Sparverhalten. In Simulationen können z. B. Eineinhalbfach-Regelsparer, Doppel Regelsparer oder Sparerschichten mit einer auf statistischen Auswertungen des abzubildenden Bausparkollektivs beruhenden Höhe der monatlichen Sparrate berücksichtigt werden. So wie den Überregelsparer gibt es in realen Bausparkollektiven auch den Typ Unterregelsparer, der monatlich geringere Sparleistungen erbringt, als den Regelsparbeitrag. Häufig ergeben sich solche Sparverhalten durch unzureichende Beratung der Bausparer beim Vertragsabschluß.

Die Höhe der Tilgungsrate ist in der Bausparpraxis wesentlich seltener von der tariflichen Höhe verschieden, als die der Sparrate. Dies liegt daran, daß Abweichungen nach unten in der Regel von den Bausparkassen nicht ohne zusätzliche Absicherung hingenommen werden und Abweichungen nach oben wegen der meist angespannten Finanzlage des typischen Darlehensnehmers selten vorkommen.

Unter dem Oberbegriff Schnellsparer werden hier all diejenigen Sparerschichten verstanden, die innerhalb relativ kurzer Zeit einen erheblichen Anteil der Vertragssumme auf ihr Bausparkonto einzahlen. Die Abgrenzung dieses Sparertyps wird hier nicht so eng gezogen wie in der Legaldefinition der Bausparkassenverordnung.[1] Dort wird ein Schnellbausparvertrag als ein Vertrag definiert, auf den innerhalb eines Jahres nach Vertragsabschluß mindestens 40 % der Vertragssumme eingezahlt werden. Der Anteil der so definierten Schnellsparverträge wird in der BKVO zusammen mit dem von Großbausparverträgen ($\geq$ 300000 DM Vertragssumme) auf 15 % des nicht zugeteilten Vertragssummenbestandes und 30 % des laufenden Neugeschäfts beschränkt.[2] Die beschriebene Legaldefinition ist für Analysen des Kollektivs nur beschränkt geeignet, denn für das Kollektiv unterscheiden sich die Wirkungen einer 39,5 %-igen Soforteinzahlung oder einer 40 %-igen Sonderzahlung, die 13 Monate nach Vertragsabschluß erfolgt, kaum von denen von Schnellsparern im Sinne der Legaldefinition.

[1] vgl. Lehmann, W. / Schäfer, O., Bausparkassengesetz ..., a.a.O., § 2 Abs. (4) BKVO, S. 239 ff.

[2] vgl. Lehmann, W./ Schäfer, O., Bausparkassengesetz ..., a.a.O., § 2 Abs. (1) - (3) BKVO, S. 239 ff.

Typische Schnellsparerschichten der Bausparpraxis sind z. B. die 40 %- und 50 %-Soforteinzahler. Sie leisten meist keine regelmäßigen Spareinzahlungen mehr, um ihren Darlehensanspruch nicht unnötig zu schmälern. Das Ziel solchen Sparverhaltens ist meist die möglichst baldige Erlangung eines zinsgünstigen Bauspardarlehens. Oft stehen solche Soforteinzahlungen auch im Zusammenhang mit der Aufnahme eines Vor- oder Zwischenfinanzierungskredits, die häufig an eine bestimmte Mindestansparung gebunden ist.

Für die Liquidität des Bausparkollektivs besonders schädlich sind Schnellsparer, die die Höhe ihrer Soforteinzahlung so bemessen, daß sie im Zeitpunkt ihrer voraussichtlichen Zuteilung gerade den vertraglichen Mindestanspargrad erreichen und so den maximalen Darlehensanspruch an die Bausparkasse haben. In den Standardtarifen liegt die dafür notwendige Höhe der Einzahlung je nach Zielbewertungszahl zwischen 36 % und 39 % der Vertragssumme. Dieses besonders kollektivschädigende Verhalten wird offensichtlich von der Kontingentierung der BKVO nicht erfaßt.

Zuzahlungen und Auffüllungen werden in der Bausparpraxis von verschiedenen Sparertypen geleistet. Auffüllungen kommen dabei jedoch nur infrage, wenn infolge einer langsamen Ansparung (Unterregelsparer), einer vorzeitigen Einstellung der regelmäßigen Besparung oder des speziellen Bewertungssystems die Zielbewertungszahl nicht die einschneidende Bedingung für die Zuteilung ist, sondern der vertragliche Mindestanspargrad. Ein wesentlicher Grund für Auffüllungen und Zuzahlungen ist in der Praxis ein hoher Marktzins für die anderweitige Beschaffung von Baudarlehen. Das in der Praxis zu beobachtende Schwankungsverhalten der Zuzahlungen in Abhängigkeit vom Marktzins kann im Simulationsmodell nachgebildet werden. Bei den Zuzahlungen sind in den meisten Tarifen Werte über 20 % der Vertragssumme nur bei Unterregelsparern sinnvoll, da bei schnellerer Ansparung die Zielbewertungszahl nur dann durch eine hohe Zuzahlung erreicht werden kann, wenn eine starke Reduzierung des maximalen Darlehensanspruchs in Kauf genommen wird.

Der Nachbildung von kombinierten Sparverhalten kommt besondere Bedeutung zu, da je nach Bewertungsverfahren der jeweiligen Bausparkasse optimale Ansparstrategien von Sparern entwickelt werden können, die sich damit bei möglichst kurzer Wartezeit den vollen Darlehensanspruch sichern können.

Teil 5

Verfahren zur Bestandsanpassung

5.1 Allgemeines zur Bestandsanpassung

In diesem einführenden Abschnitt wird zunächst die Notwendigkeit aufgezeigt, bei der Untersuchung gewisser bauspartechnischer Fragestellungen die konkreten Rahmenbedingungen miteinzubeziehen, denen eine bestimmte Bausparkasse unterliegt. Als Lösung dieses Problems wird das Konzept des Bestandsanpassungsmodells eingeführt, das für Simulationsrechnungen zu konkreten Untersuchungszwecken als Ausgangspunkt die Verhältnisse der jeweiligen Bausparkasse herstellt, auf die die Ergebnisse der Simulationsrechnungen bezogen werden sollen. Schließlich werden die Ziele formuliert, die mit der Konstruktion eines Bestandsanpassungsmodells verfolgt werden sollen und können. Im anschließenden Abschnitt 5.2 wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem solche Bestandsanpassungsmodelle entwickelt werden können.

5.1.1 Motivation für die Einbeziehung der konkreten Lage einer Bausparkasse in bauspartechnische Analysen

Es steht völlig außer Zweifel, daß die Untersuchung von bauspartechnischen Fragestellungen anhand des Beharrungszustandes einen gewissen Erkenntniswert haben. Insbesondere wird durch diese Analysetechnik die Wirkungsweise der in Frage stehenden Mechanismen für sich selbst gesehen dargestellt. Für die generelle Beurteilung beispielsweise der Funktionsfähigkeit von Bauspartarif [illegible] Kunden Verhaltensmuster im Bausparkollektiv ist diese Abstraktion von den konkreten Gegenbenheiten einer einzelnen Bausparkasse von entscheidender Bedeutung. Auf diese Weise wird [illegible] möglich, daß Maßnahmen, die in einer konkreten Situation als angebracht [illegible], langfristig jedoch negative Wirkungen haben können, als solche erkannt werden können. Als evidentes Beispiel sei hier ein Bausparkollektiv genannt, das sich in akuten Liquiditätsschwierigkeiten befindet. Vordergründig scheint ein vermehrter Anteil von Schnellsparern am Neugeschäft wegen der sofort sprunghaft steigenden Liquidität des Kollektivs von Vorteil zu sein. Die Analyse [illegible] würde jedoch zeigen, daß die zunächst entstehenden Vorteile nur kurzfristiger Natur sind und die Probleme sich langfristig vergrößern würden.

Das obige Beispiel und die entsprechende Argumentation lassen sich jedoch auch umkehren. Hat die Analyse einer Fragestellung ausgehend vom

Beharrungszustand ergeben, daß sich eine Maßnahme im Prinzip positiv auf ein Bausparkollektiv auswirkt, so heißt das jedoch noch keineswegs, daß eine bestimmte Bausparkasse diese Maßnahme in ihrer konkreten Situation ohne weiteres durchführen kann.

Als Beispiel mag hier wiederum die Problematik des Schnellsparer-Anteils am Kollektiv dienen. Besteht das augenblickliche Kollektiv einer Bausparkasse zu einem wesentlichen Teil aus Soforteinzahlern, so fließen aus diesem Teil des nicht zugeteilten Vertragsbestandes bis auf die gutgeschriebenen Guthabenszinsen der Zuteilungsmasse keine regelmäßigen Spargeldeingänge mehr zu. Eine für die langfristige Stabilität und Bestandskraft des Bausparkollektivs als wünschenswert oder nötig erkannte Reduzierung des Schnellsparer-Anteils am Neugeschäft würde die Bausparkasse wegen des dadurch schlagartig reduzierten Spargeldeingangs zunächst in Liquiditätsschwierigkeiten bringen. Die beabsichtigte Substitution eines Teils der Schnellsparer durch Regelsparer sollte aus diesem Grund nicht forciert werden, sondern allmählich vor sich gehen. Bei der Frage, wie schnell sich diese Änderung des Kollektivs vollziehen darf, ohne den Geschäftsbetrieb der Bausparkasse als Ganzes zu gefährden, spielt die ganz speziell bei dieser Bausparkasse vorhandene Liquiditätssituation eine entscheidende Rolle.

Die obigen Ausführungen machen deutlich, warum es für die geschäftspolitischen Entscheidungen einer Bausparkasse nicht unbedingt ausreicht, durch Untersuchungen am Beharrungszustand eines Bausparkollektivs die prinzipiellen langfristigen Wirkungen von Änderungen im Bauspargeschäft zu studieren. Für die Liquiditäts- und Ertragslage einer Bausparkasse im kurz- und mittelfristigen Bereich spielt der Altbestand im Bausparkollektiv eine wesentliche Rolle. Das Neugeschäft, in dem sich geänderte Rahmenbedingungen meistens quantitativ und strukturell niederschlagen, ist je nach Umschlaggeschwindigkeit nur ein Teil von 10–20% des gesamten nichtzugeteilten Bestandes. Dementsprechend gering ist der Einfluß eines einzelnen Neugeschäftsjahrgangs auf die Aggregate des Bausparkollektivs wie Bauspareinlagen, Bauspardarlehen, Spargeldeingang, usw.. Die bauspartechnischen Größen reagieren also nur relativ träge auf Änderungen im Neugeschäft. Oder anders formuliert: die Wirkungen aus dem Altbestand dominieren gerade eingetretene Neugeschäftsänderungen in sehr hohem Maße. Erst allmählich, im Laufe von etwa 15 bis 25 Jahren (Abwicklungsdauer eines Bausparvertrages), setzen sich die geänderten Bedingungen gegen den

Altbestand durch. In dieser Übergangsphase werden Liquiditäts- und Ertragslage der Bausparkasse vom Zusammenwirken des Altbestandes und des geänderten Neugeschäfts bestimmt. Der Einfluß des Altbestandes geht dabei kontinuierlich zurück, so daß die ersten Jahre nach der Änderung der Bedingungen hauptsächlich vom Altbestand bestimmt werden.

Eine Bausparkasse muß selbstverständlich wie jedes andere Unternehmen jedes einzelne Jahr wirtschaftlich überleben. Es hilft ihr nicht allein, wenn sie weiß, daß ihre Liquiditäts- und Ertagssituation in zehn oder fünfzehn Jahren gut sein wird. Ganz abgesehen davon hat die weitere Konstanz der Geschäftslage, die in den Analysen im allgemeinen unterstellt wird, auch nur modellhaften Charakter. Zunächst einmal muß die Bausparkasse den Übergang in die neue Situation in jedem einzelnen Jahr überstehen.

Aus den vorhergehend beschriebenen Gründen werden in diesem Teil der Arbeit Verfahren vorgestellt, die eine Einbeziehung der konkreten Geschäftslage einer Bausparkasse in die Analyse bauspartechnischer Fragestellungen ermöglichen. Die daraus entstehenden modellmäßigen Abbildungen eines realen Bausparkollektivs werden im folgenden Bestandsanpassungsmodelle genannt.

5.1.2 Die Methode der Bestandsanpassung

Die besondere Problematik der Berücksichtigung des Altbestandes einer Bausparkasse liegt in der Art des Analysemodells begründet, das im Teil 4 für eingehende Detailuntersuchungen vorgeschlagen wurde. Ein Simulationsmodell stellt einen sehr flexiblen Rahmen für die Untersuchung bauspartechnischer Fragestellungen dar. Es ist a priori losgelöst von irgendeiner konkreten Situation. Ausgehend von der Funktionsweise des Simulationsmodells erscheint eigentlich nur eine Möglichkeit sinnvoll, die Wirkungen des Altbestandes in eine Simulationsrechnung einzubeziehen. Das Simulationsmodell berechnet die bauspartechnisch relevanten Kenngrößen eines Kollektivs durch die simulierte Abwicklung von Bausparkonten und deren Aggregation. Insofern kann ein vorhandener Altbestand nur dadurch in die Analyse einbezogen werden, daß im Simulationsmodell Bausparkonten für Sparer aus dem Altbestand vorgesehen werden, die gemeinsam mit dem zukünftigen Neugeschäft abgewickelt werden. Die Sparerschichten, die den Altbestand repräsentieren, sollen dabei so gewählt und zusammengestellt werden, daß sich das Kollektiv, das sich aus ihnen ergibt, ähnlich

verhält wie der reale Altbestand der Bausparkasse. Auf diese Weise wird ein Modell der Bausparkasse erzeugt, das jeder Simulationsrechnung vorgeschaltet werden kann. Der Begriff Bestandsanpassung meint also das Aussuchen einer geeigneten Kombination von Sparerschichten, durch deren Simulation die realen Bestände einer Bausparkasse hinreichend genau abgebildet werden.

Bei anderen denkbaren Modellansätzen zur Untersuchung bauspartechnischer Fragestellungen als dem Simulationsmodell stellt sich dieses Problem in ganz anderer Form. In ökonometrischen Prognosemodellen etwa würde die spezifische Situation einer einzelnen Bausparkasse durch entsprechende Verhaltensgleichungen und die Schätzung ihrer Parameter automatisch berücksichtigt.

5.1.3 Ziele der Bestandsanpassung und ihre Überprüfung

Das Ziel der Bestandsanpassung ist es, die Zukunftswirkungen des Altbestandes abzubilden, so daß sie in eine bauspartechnische Analyse einbezogen werden können. Diese Zielvorgabe ist jedoch ziemlich allgemein und deswegen nicht operational für die Entwicklung von Verfahren zur Bestandsanpassung. Für Simulationsrechnungen werden die Wirkungen des Altbestandes als konkrete Zahlen der wichtigen Aggregate des Bausparkollektivs benötigt, die dann in der Kombination mit den Zahlen des für die Zukunft unterstellten Bausparkollektivs die Gesamteffekte darstellen. Das Bestandsanpassungsmodell muß also alle wichtigen bauspartechnischen Größen liefern, die der Altbestand in der Zukunft in jedem Jahr induziert. Damit auch beispielsweise Änderungen der Zielbewertungszahl für die weitere Abwicklung des Altbestandes berücksichtigt werden können, reicht es nicht aus, die zahlenmäßige Entwicklung der Aggregate des Altbestandes für die Zukunft einmal zu prognostizieren. Das Bestandsanpassungsmodell muß vielmehr die Bausparkonten des Altbestandes zur weiteren Abwicklung an die nachfolgende Simulationsrechnung übergeben.

Ziel eines Verfahrens zur Bestandsanpassung muß es also sein, die Bausparkonten eines Bestandes so zu erzeugen, daß ihre Struktur mit der des realen Bestandes möglichst gut übereinstimmt. Auch diese Zieldefinition ist zur Entwicklung eines Verfahrens nicht operational genug. Denn es wäre ein hoffnungsloses Unterfangen, einen Übereinstimmungsgrad zwischen den Bausparkonten einer Bausparkasse (die reale Anzahl liegt etwa zwischen 50000 und 5 Millionen) und den repräsentativen Konten einer Simulation messen und

anpassen zu wollen. Abgesehen davon gäbe es bei einem solchen Vorgehen erhebliche Datenprobleme, denn die Bausparkassen haben in der Regel nur neuere Kontenstände für einen einfachen Zugriff verfügbar, da eine Haltung der gesamten Kontenentwicklungen zu riesigen Datenbeständen führen würde.

Aus diesen Gründen wird eine Zielgröße benötigt, die es ermöglicht, die Übereinstimmung zwischen dem realen und einem anzupassenden Bestand zu messen. Diese Zielgröße muß verläßlich sein in dem Sinn, daß gute Zielgrößen-Werte darauf schließen lassen, daß der angepaßte Altbestand sich in der Zukunft ähnlich verhält wie der tatsächliche. Als solche Zielgröße wird hier die Anpassung der kollektiven Aggregate an die Realität benutzt. Es wird also nach einer Sparerschichtenstruktur gesucht, deren kollektive Größen wie Bauspareinlagen, Bauspardarlehen, usw. möglichst gut den in der Vergangenheit tatsächlich realisierten Größen entsprechen. Wenn genügend der wichtigsten bauspartechnischen Kollektivkenngrößen eines simulierten Bestandes mit den tatsächlichen übereinstimmen, so kann man erwarten, daß sich die beiden Bestände in der Zukunft ähnlich verhalten. Der Überprüfung dieses Zukunftsverhaltens eines Bestandsanpassungsmodells kommt besondere Bedeutung zu, denn es gibt natürlich keine Garantie für die Vermutung, daß sich die Ähnlichkeit von Beständen in der Vergangenheit auch fortsetzen wird. Zu diesem Zweck kann hier ein generelles Verfahren der Ökonometrie benutzt werden, nämlich die ex-ante Prognose vom Standpunkt der Vergangenheit aus.

Das Ergebnis einer Bestandsanpassung besteht in einer Schichteneinteilung des Altbestandes nach Abschlußjahrgängen. Eine solche Schichteneinteilung ist bereits für sich selbst genommen eine wichtige und interessante Information über das Kollektiv einer Bausparkasse. Insofern kann mit der Bestandsanpassung gleichzeitig das Ziel der Kollektivanalyse betrieben werden. Hierbei ist jedoch Vorsicht geboten. Das primäre Ziel der Bestandsanpassung ist es, eine gute Prognosequalität zu erreichen. Ob oder inwieweit die daraus resultierende Schichteneinteilung mit dem tatsächlichen Bausparkollektiv übereinstimmt, ist hierbei a priori nicht klar. Insbesondere besteht unter Umständen ein Identifizierbarkeitsproblem. Das bedeutet, daß die erreichte Anpassungsgüte eventuell auch mit einer anderen Schichteneinteilung erreicht werden kann. Es stellt sich somit also die Frage nach der Eindeutigkeit der erzielten Lösungen.

5.2 Die optimierte Bestandsanpassung

5.2.1 Der Modellansatz

Der Versuch, ein Bestandsanpassungsmodell für eine Bausparkasse zu konstruieren, kann nur dann zu einem befriedigenden Ergebnis führen, wenn die Sparerschichten, die für die Anpassung verwendet werden, den tatsächlichen Sparerbestand repräsentieren. Welche Sparerschichten in den einzelnen Tarifen berücksichtigt werden sollen, muß also durch entsprechende Analysen des realen Kollektivs festgelegt werden.

Die typischen Sparverhalten, die in der Praxis auftreten, lassen sich grob durch folgende Elemente charakterisieren:

- Höhe der Soforteinzahlung
- Höhe der regelmäßigen Sparrate
- Höhe einer möglichen Zuzahlung vor Zuteilung
- Fortsetzung des Vertrages
- Kündigung/Darlehensverzicht
- Einstellung der Sparraten bei einem bestimmten Anspargrad.

Durch geeignete Kombinationen dieser Elemente lassen sich die in der Praxis beobachteten Ansparverhalten gut nachbilden. Aus den stichprobenartigen bausparkassenspezifischen Kollektivbeobachtungen lassen sich zwei wichtige Dinge ableiten. Zum einen erhält man Anhaltspunkte für die Höhe der erwähnten Elemente. Zum anderen lassen sich Unter- und Obergrenzen für die Neugeschäftsanteile der aus den Stichproben ermittelten Sparerschichten herleiten.

Die Anpassung der aktuellen Bestände wird nach Tarifen getrennt durchgeführt. Jeder Tarif wird als eigenes Bausparkollektiv aufgefaßt, das für sich angepaßt wird. Da die Zuteilung aller Bausparer anhand der Reihe der Zielbewertungszahlen erfolgt, macht man mit dieser Aufspaltung keinen Fehler gegenüber der Realität. Für das Optimierungsverfahren bringt diese Aufspaltung jedoch erhebliche Rechenzeitvorteile, da eine Teilung der Zahl der Verträge bei diesem Verfahren aus Konstruktionsgründen eine überproportionale Reduzierung der Rechenzeit zur Folge hat.

Da die Simulation des Bestandsanpassungsmodells über die Zielbewertungszahl erfolgt, und zwar mit den tatsächlichen Zielbewertungszahlen der Vergangenheit, ist die Zuteilung und die gesamte Abwicklung der einzelnen Sparerschichten

unabhängig von den anderen Sparerschichten. Diese Tatsache ist die Grundlage, auf der die Verfahren zur Bestandsanpassung überhaupt erst aufbauen können.

Für jede Sparerschicht und jedes Kalenderjahr ab Einführung des entsprechenden Tarifs werden Simulationen durchgeführt, in der nur die jeweils vier Verträge zusammengefaßt sind, die in den Quartalen eines Kalenderjahres abgeschlossen werden. Dabei wird jeweils eine Einheit Neugeschäft vorgegeben und die realisierte Zielbewertungszahlenreihe für die Zuteilung unterstellt. Das Neugeschäft einer Schicht j im Jahr t wird mit NVS_t^j bezeichnet. Die Beiträge des Abschlußjahrgangs t der Schicht j zu den Zielgrößen in den verschiedenen Jahren ergeben sich dann also einfach als das NVS_t^j-fache der in den einzelnen Simulationen berechneten Daten. Somit ergeben sich die kollektiven Aggregate einer bestimmten Kollektivzusammensetzung einfach als die mit den Prozentanteilen der Sparerschichten gewichtete Summe der entsprechenden Größen der einzelnen Sparerschichten.

Das Neugeschäft der einzelnen Jahre wird durch Nebenbedingungen, die im Optimierungsverfahren eingehalten werden, auf die jeweils richtige, reale Höhe fixiert. Die Auswahl einer Kollektivzusammensetzung erfolgt also nur unter den Möglichkeiten, die das tatsächliche Neugeschäft der Bausparkasse in allen Jahren abbilden.

Für das Optimierungsverfahren wird eine Zielfunktion konstruiert, die die Anpassung der wichtigsten kollektiven Aggregate über einen längeren Zeitraum erfaßt. Die Zielgrößen sollen möglichst so weit in die Vergangenheit zurück richtig angepaßt werden, daß der ganze Zeitraum abgedeckt ist, in dem die Verträge des gegenwärtigen Bestandes abgeschlossen wurden. Bei den Vertragslaufzeiten der Vergangenheit sollte dies also etwa ein Zeitraum von 15-20 Jahren sein. Um die Zielgrößen dort anpassen zu können, muß der Anlaufeffekt des Bausparkollektivs bereits zu Beginn dieser Phase abgeklungen sein. Das bedeutet, daß die Simulation weitere 15-20 Jahre vorher begonnen werden muß. Insgesamt muß also mit einem Zeithorizont von 30-40 Jahren gerechnet werden.

5.2.2.1 Definition und Erläuterung der benutzten Variablen und Parameter

Die Neugeschäftsniveaus NVS_t^j der einzelnen Sparerschichten $j \in \{1,\ldots,J\}$ in den Jahren $t \in \{ta,\ldots,te\}$ wurden bereits im vorhergehenden Abschnitt als die Variablen dargestellt, über denen die Optimierung durchgeführt wird. Bei einem anzusetzendem Zeithorizont von 30–40 Jahren und einer Sparerschichtenzahl von 10–15 ergibt sich also eine Dimensionierung des Optimierungsproblems von 300 bis 600 Variablen. Mit NVS_t wird das realisierte Neugeschäft des betrachteten Tarifs im Jahr t bezeichnet.

Mit den Hilfsvariablen $\dot{z}_t^l$ werden die Anpassungen der Zielgrößen bezeichnet. Der Index l steht dabei für die jeweiligen Zielgrößen. In der hier vorgestellten Version werden $L = 7$ Zielgrößen berücksichtigt. Im einzelnen sind dies:

z_t^1 : Bauspareinlagen im Jahr t $(\approx BSE_t)$
z_t^2 : Bauspardarlehen im Jahr t $(\approx BDZ_t)$
z_t^3 : nicht zugeteilter Vertragssummenbestand im Jahr t $(\approx VSNZ_t)$
z_t^4 : zugeteilter Vertragssummenbestand im Jahr t $(\approx VSZ_t)$
z_t^5 : Spargeldeingang im Jahr t $(\approx SPE_t)$
z_t^6 : Anlegungsgrad im Jahr t $(\approx ANLEG_t)$
z_t^7 : Vertragssummen der Sparer, die im Jahr t aus der Sparphase ausscheiden $(\approx ZKVS_t = ZVS_t + KVS_t)$

Obwohl die einzelnen Zielgrößen z_t^l jeweils eine ganz konkrete Datenreihe bedeuten, ist die Einführung der verallgemeinernden Notation aus zwei Gründen sinnvoll. Zum einen lassen sich die Bauspareinlagen, die Bauspardarlehen, die Vertragssummenbestände und der Spargeldeingang analytisch gemeinsam behandeln. Zum anderen erfordert eine mögliche Erweiterung des Ansatzes auf weitere Zielgrößen mit dieser Notation keine Änderung der gesamten Problemformulierung sondern nur eine entsprechende Erhöhung des Parameters L.

Die angepaßten Größen werden mit einem "$\cdot$" versehen. $\dot{z}_{1980}^6$ stellt also den Anlegungsgrad des Jahres 1980 im angepaßten Modell dar, während z_{1980}^6 der entsprechende realisierte Anlegungsgrad ist.

Schließlich werden die Beiträge der einzelnen Sparerschichten zu den Zielgrößen mit $D_{l,t}^{j,s}$ bezeichnet. Dabei stehen die Indizes für folgendes:

$j \in \{1,\ldots,J\}$	für die Sparerschicht
$s \in \{ta,\ldots,te\}$	für das Abschlußjahr der Sparerschicht
$l \in \{1,\ldots,L\}$	für die Zielgröße
$t \in \{ta,\ldots,te\}$	für das Jahr des Beitrags.

$D_{5.1970}^{2.1985}$ ist demnach also der Spargeldeingang im Jahr 1970 der vier Sparer aus der zweiten Sparerschicht, deren Verträge in 1965 abgeschlossen wurden. Dabei ist für diese vier Sparer ein Gesamtneugeschäft von 1 unterstellt. Die Bausparsumme jedes dieser Verträge beträgt also 0,25.

5.2.2.2 Die Zielfunktion

Die Zielfunktion soll die Anpassung der Zielgrößen über einen längeren Zeitraum hinweg messen. Die Abweichung der Anpassung beträgt

$$z_t^l - \hat{z}_t^l$$

für alle Zielgrößen $l \in \{1,\ldots,L\}$ und alle Jahre $t \in \{ta,\ldots,te\}$. Die einzelnen Zielgrößen weisen sehr unterschiedliche Größenordnungen auf. So liegt der Anlegungsgrad zwischen 0 und 2, während die anderen Zielgrößen je nach Größe der Bausparkasse in die Millionen und Milliarden gehen. Dabei sind die Bestandsgrößen *BSE,BDZ,VSNZ* und *VSZ* wiederum um einen Faktor von 5–10 größer als die Strömungsgrößen *SPE* und *ZKVS*. Um diese Skalierungseffekte auszuschließen, gehen in die Zielfunktion nicht die absoluten, sondern die relativen Abweichungen R_t^l ein:

$$R_t^l = \frac{z_t^l}{z_t^l} - \frac{\hat{z}_t^l}{z_t^l} = \frac{\hat{z}_t^l}{z_t^l} - 1.$$

Die Zielfunktion hängt also von den prozentualen Abweichungen der angepaßten Zielgrößen von den realisierten Werten ab.

Von der Methode der kleinsten Quadrate her ist das Prinzip bekannt, nicht die Abweichungen selbst in der Zielfunktion zu berücksichtigen, sondern ihre Quadrate. Die Idee hinter diesem Prinzip ist es, große Abweichungen relativ stärker zu bewerten als kleine. Dies geht von der Überlegung aus, daß viele kleine Abweichungen in der Regel als nicht so schwerwiegend empfunden werden, als eine große.

Zusätzlich erscheint es sinnvoll, verschiedene Gewichtungen für einzelne Jahre und Zielgrößen zuzulassen. So würde man der richtigen Anpassung der Zielgrößen in der jüngeren Vergangenheit eher stärkeres Gewicht geben, als der Anpassung

früherer Werte. Zusätzlich ist es denkbar, daß es irgendwann in der Vergangenheit Besonderheiten in der Entwicklung der kollektiven Aggregate gegeben hat, denen man besondere Bedeutung beimißt. Auf der anderen Seite ist es nicht sinnvoll, in den ersten 5 -10 Jahren der Simulation eine brauchbare Anpassung zu erwarten, da sich der simulierte Bestand erst im Aufbau befindet, während der entsprechende reale Bestand in der Regel keinem Anlaufeffekt mehr unterliegt. Dementsprechend würde man die Zeitgewichtungsfaktoren in den ersten Jahren niedrig wählen oder auf Null setzen. Diese Zeitgewichtung wird durch die Gewichtungsfaktoren

$$WT_t,\ t \in \{ta, \ldots, te\}$$

in der Zielfunktion erfaßt.

Ähnliche Argumente gelten für die Einführung von Gewichtungsfaktoren für die einzelnen Zielgrößen. Der Anlegungsgrad z.B. hat einen durchschlagenden Effekt auf die Ertragslage der Bausparkasse (vgl. Abschnitt 6.1.2). Insofern wird man seiner korrekten Anpassung größeres Gewicht beimessen als etwa der Anpassung der Vertragssummenbestände. Diese Gewichtung der Zielgrößen erscheint in der Zielfunktion in Form der Gewichtungsfaktoren

$$WL_l,\ l \in \{1, \ldots, L\}.$$

Unter Einbeziehung aller erläuterten Einzelheiten lautet die Zielfunktion für die optimierte Bestandsanpassung also folgendermaßen:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{t=ta}^{te} WT_t \cdot \sum_{l=1}^{L} WL_l \cdot (R_t^l)^2 \\ &= \sum_{t=ta}^{te} WT_t \cdot \sum_{l=1}^{L} WL_l \cdot \left(\frac{\hat{z}_t^l - z_t^l}{z_t^l} \right)^2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2.2.3 Die Nebenbedingungen

5.2.2.3.1 Definitionsgleichungen

Im letzten Abschnitt wurde die Zielfunktion als Funktion der Hilfsvariablen $\hat{z}_t^l$ eingeführt. Hier werden nun diese Hilfsvariablen durch die Optimierungsvariablen NVS_t^l erklärt. Dazu wird zunächst der Bauspareinlagenbestand BSE_t im Jahr t in seiner Zusammensetzung betrachtet. Er ist die Summe der Bauspareinlagen

aller der Bausparer, deren Vertrag vor oder im Jahr t abgeschlossen wurde. Die Bauspareinlage im Jahr t eines im Jahr $s \leq t$ abgeschlossenen Vertrages in der Schicht j mit der Bausparsumme NVS_s^j ist

$$NVS_s^j \cdot D_{1,t}^{j,s}. \tag{5.2}$$

Die gesamten Bauspareinlagen in t ergeben sich dann durch die Summierung von (5.2) über die Abschlußjahre $s \in \{ta, \ldots, t\}$ und die Sparerschichten $j \in \{1, \ldots, J\}$:

$$BSE_t = \hat{z}_t^1 = \sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{1,t}^{j,s}. \tag{5.3}$$

Für die Zielgrößen *BDZ,VSNZ,VSZ* und *SPE* gilt (5.3) natürlich entsprechend:

$$\hat{z}_t^l = \sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{l,t}^{j,s} \qquad \text{für } l \in \{1, \ldots, 5\}. \tag{5.4}$$

Der Anlegungsgrad *ANLEG* hat folgende Definitionsgleichung:

$$ANLEG_t = \hat{z}_t^6 = \frac{B\hat{D}Z_t}{B\hat{S}E_t} = \frac{\hat{z}_t^2}{\hat{z}_t^1} = \frac{\sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{2,t}^{j,s}}{\sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{1,t}^{j,s}}. \tag{5.5}$$

Die Vertragssummen $ZKVS_t$ der Sparer, die im Jahr t aus der Sparphase ausscheiden, können ebenfalls aus den übrigen Zielgrößen berechnet werden. Für sie müssen die Beiträge $D_t^{j,s}$ der einzelnen Sparer also nicht einbezogen werden. Ihre Höhe ergibt sich aus Gleichung (5.6), die die zeitliche Entwicklung des nichtzugeteilten Vertragsbestandes beschreibt:

$$VSNZ_t = VSNZ_{t-1} + NVS_t - ZKVS_t \tag{5.6}$$

Der nichtzugeteilte Vertragssummenbestand in t ergibt sich aus dem Vorjahresbestand $VSNZ_{t-1}$ unter Berücksichtigung der Zugänge (Neugeschäft NVS_t) und der Abgänge (Zuteilungen und Kündigungen $ZKVS_t$).

Aufgelöst nach $ZKVS_t$ ergibt (5.6):

$$ZKVS_t = VSNZ_{t-1} - VSNZ_t + NVS_t. \tag{5.7}$$

Für die angepaßten Größen gilt dann also:

$$ZK\hat{V}S_t = \hat{z}_t^7 = VSNZ_{t-1} - VSNZ_t + \sum_{j=1}^{J} NVS_t^j = \hat{z}_{t-1}^3 - \hat{z}_t^3 + NVS_t. \quad (5.8)$$

In der letzten Gleichung wurde bereits vorweggenommen, daß sich die Neuabschlüsse aller Schichten in einem Jahr zum tatsächlichen Neugeschäft summieren müssen.

Der komplette Satz Definitionsgleichungen lautet also:

$$-\hat{z}_t^1 = \sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{t,t}^{j,s} \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, 5\}$$

$$-\hat{z}_t^6 = \frac{\hat{z}_t^2}{\hat{z}_t^1} \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}$$

$$-\hat{z}_t^7 = \hat{z}_{t-1}^3 - \hat{z}_t^3 + NVS_t \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}$$

Insgesamt sind dies also $L \cdot (te - ta + 1)$ Nebenbedingungen für das Optimierungsproblem.

Diese Nebenbedingungen dienen lediglich dazu, die Hilfsvariablen $\hat{z}_t^i$ zu definieren, die in der Zielfunktion benutzt werden. Bei manchen mathematischen Optimierungsverfahren kann man diese Tatsache ausnutzen, indem man die Definitionsgleichungen direkt in die Zielfunktion einsetzt und so die Hilfsvariablen eliminiert. Im später vorgestellten Line-Search Verfahren wird dies getan.

5.2.2.3.2 Das Neugeschäft

Das Neugeschäft wird im Anpassungsmodell durch Nebenbedingungen auf den realisierten Werten gehalten. Da sich das Neugeschäft eines Jahres t im Simulationsmodell aus dem Neugeschäft der J Sparerschichten zusammensetzt, haben diese Nebenbedingungen folgende Form:

$$\sum_{j=1}^{J} NVS_t^j = NVS_t \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}. \quad (5.9)$$

Dies sind also weitere $te - ta + 1$ Restriktionen der Optimierungsaufgabe.

5.2.2.3.3 Obere und untere Schranken für die Neugeschäftsanteile der Sparerschichten

Da die Neuabschlußvolumina NVS_t^j aller Sparerschichten in allen Jahren nichtnegativ sein müssen, haben die unteren Schranken für alle Variablen mindestens den Wert Null. Zusätzlich ist es aber denkbar, daß aus Kollektivanalysen oder anderen Quellen bereits Information über die Größe mancher Neugeschäftsanteile vorliegt. Insbesondere führen viele Bausparkassen Statistiken über höhere Soforteinzahlungen bei Vertragsabschluß, aus denen sich die Neugeschäftsanteile der Schnellsparerschichten recht genau ableiten lassen. Die Berücksichtigung dieser Information im Optimierungsprozeß hat zwei positive Effekte. Zum einen kann man hoffen, daß durch die enge Eingrenzung einiger Variablen zulässige Startlösungen für das Verfahren bereits "näher" am Optimum liegen als Startlösungen, in die diese Information nicht eingeht. Zum anderen stellen solche Nebenbedingungen sicher, daß die Optimallösung des Optimierungsverfahrens wenigstens in bezug auf die eingegrenzten Variablen nicht zu weit von der wirklichen Kollektivzusammensetzung liegt. Auf diesen Zusammenhang wird noch im Abschnitt 5.2.4 näher eingegangen.

Im Optimierungsmodell werden diese Informationen durch folgende Nebenbedingungen berücksichtigt:

$$\frac{1}{NVS_t} \cdot NVS_t^j \geq US_t^j \qquad \text{für } j \in \{1,\ldots,J\}, t \in \{ta,\ldots,te\} \tag{5.10}$$

$$\frac{1}{NVS_t} \cdot NVS_t^j \leq OS_t^j \qquad \text{für } j \in \{1,\ldots,J\}, t \in \{ta,\ldots,te\} \tag{5.11}$$

Die Skalierung mit $\frac{1}{NVS_t}$ wird vorgenommen, um die oberen und unteren Schranken OS_t^j und US_t^j nicht in absoluten Zahlen angeben zu müssen. OS_t^j und US_t^j werden so als Anteile am Neugeschäft des Jahres t zwischen 0 und 1 angegeben. Falls keine genaueren Informationen für einzelne Sparerschichten vorliegen, setzt man die entsprechenden Schranken auf 0 und 1. Die Anzahl dieser Nebenbedingungen ist also $2 \cdot J \cdot (ta - te + 1)$.

5.2.2.3.4 Schranken für die jährlichen Schwankungen der Neugeschäftsanteile

Bei einer Optimierung der Zielfunktion (5.1) unter den bisher eingeführten Nebenbedingungen (5.4), (5.5), (5.8), (5.9), (5.10), und (5.11) könnte sich eine

Optimallösung ergeben, die für die Neugeschäftsanteile der gleichen Sparerschicht in aufeinanderfolgenden Jahren starke Schwankungen aufweist. Schwankungen der Schichtenanteile von Jahr zu Jahr kommen in der Bausparpraxis als Folge von Änderungen der ökonomischen Rahmendaten natürlich vor. Als gewichtigster Einflußfaktor ist hier der Marktzins zu nennen. In einzelnen Jahren, in denen sich die Rahmenbedingungen des Bausparens ändern, können sie sogar erheblich sein. Zum Beispiel hat das staatliche Zinsverbilligungsprogramm 1982/83 den Anteil der Schnellsparer bei allen Bausparkassen stark ansteigen lassen, da die Zinsvergünstigungen nur für Objekte gewährt wurden, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt fertiggestellt und daher auch finanziert waren. Ein weiterer systematischer Grund für das Schwanken der Neugeschäftsanteile ist die bewußte Kollektivsteuerung, die viele Bausparkassen zur Sicherung ihrer zukünftigen Liquiditäts- und Ertragslage betreiben.

In den Jahren ohne besondere äußere Einflüsse auf das Bausparwesen dürften diese Schwankungen jedoch nicht allzu groß sein. Um dies auch in der Anpassung zu gewährleisten, wird die Schwankung der Anteile durch entsprechende Nebenbedingungen beschränkt.

$$\frac{1}{NVS_t} NVS_t^j \geq \frac{1}{NVS_{t-1}} NVS_{t-1}^j - \epsilon_t^j \quad \text{für } j \in \{1,\ldots,J\}, t \in \{ta+1,\ldots,te\} \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{NVS_t} NVS_t^j \leq \frac{1}{NVS_{t-1}} NVS_{t-1}^j + \epsilon_t^j \quad \text{für } j \in \{1,\ldots,J\}, t \in \{ta+1,\ldots,te\} \quad (5.13)$$

Durch verschiedene Werte ϵ_t^j können auch stärkere Schwankungen in den Jahren zugelassen werden, in denen sie in der Bausparpraxis tatsächlich aufgetreten sind oder aufgrund der äußeren Gegebenheiten hätten auftreten können. Die Zahl dieser Nebenbedingungen ist $2 \cdot J \cdot (te - ta)$.

5.2.3 Verfahren zur Lösung des mathematischen Problems

Hier werden zwei unterschiedliche Verfahren zur Lösung des in 5.2.2 aus den bauspartechnischen Anforderungen formulierten mathematischen Problems vorgestellt. In 5.2.3.1 wird gezeigt, daß eine formale Lösung des Optimierungsproblems, die auf die Lösung eines Ungleichungssystems hinausläuft, nicht zu praktikablen Verfahren führt. Die zweite Methode ist ein numerisches Optimierungsverfahren der nichtlinearen Programmierung, das für die speziellen Erfordernisse der Problemformulierung modifiziert wird.

Nachfolgend ist das mathematische Problem noch einmal zusammengefaßt dargestellt:

$$\min \sum_{t=ta}^{te} WT_t \cdot \sum_{l=1}^{7} WL_l \cdot \left(\frac{\hat{z}_t^l - z_t^l}{z_t^l} \right)^2 \tag{5.1}$$

unter:

$$\sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{t,t}^{j,s} - \hat{z}_t^1 = 0 \quad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}, \text{ und } l \in \{1, \ldots, 5\} \tag{5.4}$$

$$\hat{z}_t^2 / \hat{z}_t^1 - \hat{z}_t^6 = 0 \quad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \tag{5.5}$$

$$\hat{z}_{t-1}^3 - z_t^3 + NVS_t - \hat{z}_t^7 = 0 \quad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \tag{5.8}$$

$$g_t = \sum_{j=1}^{J} NVS_t^j - NVS_t = 0 \quad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \tag{5.9}$$

$$hu_t^j = \frac{1}{NVS_t} NVS_t^j - US_t^j \geq 0 \quad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, J\} \tag{5.10}$$

$$ho_t^j = -\frac{1}{NVS_t} NVS_t^j + OS_t^j \geq 0 \quad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, J\} \tag{5.11}$$

$$ku_t^j = \frac{1}{NVS_t} NVS_t^j - \frac{1}{NVS_{t-1}} NVS_{t-1}^j + \epsilon_t^j \geq 0 \quad \text{für } t \in \{ta+1, \ldots, te\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, J\} \tag{5.12}$$

$$ko_t^j = -\frac{1}{NVS_t} NVS_t^j + \frac{1}{NVS_{t-1}} NVS_{t-1}^j + \epsilon_t^j \geq 0 \quad \text{für } t \in \{ta+1, \ldots, te\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, J\} \tag{5.13}$$

Die Minimierung von (5.1) erfolgt dabei über die Variablen NVS_t^j und die Hilfsvariablen $\hat{z}_t^l$.

5.2.3.1 Formaler Lösungsansatz

Der Satz von Kuhn–Tucker[1] über die Minimierung von Funktionen unter Nebenbedingungen sagt folgendes:

Satz: *Seien* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *stetig differenzierbar und* x *ein lokales Minimum des Problems*

$$\min f(x)$$
$$\text{unter } h(x) = 0, g(x) \leq 0.$$

[1] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 233.

Sei x zusätzlich regulärer Punkt bzgl. $g(x)$ und $h(x)$ (d.h. die Jacobi Matrizen $\nabla g(x), \nabla h(x)$ der partiellen Ableitungen von g und h haben vollen Zeilenrang). Dann gibt es Vektoren $\lambda \in \mathbb{R}^m, 0 \leq \mu \in \mathbb{R}^p$ mit

$$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) + \mu \nabla h(x) = 0$$
$$\mu h(x) = 0.$$

Da die Hilfsvariablen $\dot{z}_t^l$ nur zur Definition der Anpassung der bauspartechnischen Größen dienen, können sie durch Einsetzen in die Zielfunktion (5.1) eliminiert werden. Dadurch wird erstens eine wesentliche Reduzierung der Problemgröße (Anzahl der Variablen, Anzahl der Nebenbedingungen) erreicht. Zweitens wird das Ableiten der Funktion vereinfacht. Dieses Einsetzen führt zu folgender Zielfunktion:

$$\begin{aligned} f' = & \sum_{t=ta}^{te} WT_t \cdot \sum_{l=1}^{7} WL_l \cdot (\frac{1}{z_t^l} \dot{z}_t^l - 1)^2 = \\ & \sum_{t=ta}^{te} WT_t \, (\sum_{l=1}^{5} WL_l \, (\frac{1}{Z_t^l} \sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{l,t}^{j,s} - 1)^2 + \\ & \qquad WL_6 (\frac{z_t^1 \sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{2,t}^{j,s}}{z_t^2 \sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{1,t}^{j,s}} - 1)^2 + \\ & \qquad WL_7 (\frac{1}{z_{t-1}^3 - z_t^3 + NVS_t} (\sum_{s=ta}^{t-1} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{3,t-1}^{j,s} \\ & \qquad - \sum_{s=ta}^{t} \sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{3,t}^{j,s} + NVS_t) - 1)^2) \end{aligned}$$

Die Minimierungsaufgabe ist damit reduziert auf:

$$\min f' \qquad \text{unter (5.9)–(5.13).}$$

Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein lokales Minimum dieser Aufgabe ergeben sich entsprechend dem Satz von Kuhn–Tucker als:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial NVS_t^j} + \sum_{s=ta}^{te} \lambda_t \frac{\partial g_s}{\partial NVS_t^j} \\ & \quad - \sum_{s=ta}^{te} \sum_{n=1}^{J} \left(\mu u_s^n \frac{\partial hu_s^n}{\partial NVS_t^j} + \mu o_s^n \frac{\partial ho_s^n}{\partial NVS_t^j} \right) \\ & \quad - \sum_{s=ta+1}^{te} \sum_{n=1}^{J} \left(\nu u_s^n \frac{\partial ku_s^n}{\partial NVS_t^j} + \nu o_s^n \frac{\partial ko_s^n}{\partial NVS_t^j} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}, j \in \{1, \ldots, J\} \qquad (5.14)$$

$$g_t = 0 \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \tag{5.9}$$

$$\mu u_t^j \cdot hu_t^j = 0 \text{ und } \mu o_t^j \cdot ho_t^j = 0 \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}, j \in \{1, \ldots, J\} \tag{5.15}$$

$$\nu u_t^j \cdot ku_t^j = 0 \text{ und } \nu o_t^j \cdot ko_t^j = 0 \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}, j \in \{1, \ldots, J\} \tag{5.16}$$

Zusätzlich müssen die $\mu u_t^j, \mu o_t^j, \nu u_t^j, \nu o_t^j$ nichtnegativ sein.

Beim Ausrechnen von (5.14) fallen in den Doppelsummen, die die Funktionen g, hu, ho, ku, ko betreffen, fast alle Glieder weg, da NVS_t^j in jeweils nur einer bzw. zwei (bei ku und ko) der Funktionen vorkommt. In der Ableitung von f kommen wiederum die $\hat{z}_t^l$ vor, die hier jedoch nur als vereinfachende Schreibweise für die Doppelsummen (5.4) oder die entsprechenden Ausdrücke aus (5.5) und (5.8) zu verstehen sind und nicht als Variable.

$$\begin{aligned}(5.14) \Leftrightarrow \sum_{\tau=t}^{te} WT_\tau \Big(\sum_{l=1}^{5} WL_l \cdot 2 \Big(\frac{\hat{z}_\tau^l - z_\tau^l}{z_\tau^l} \Big) \cdot \frac{1}{z_\tau^l} \cdot D_{l,\tau}^{j,t} + \\ WL_6 \cdot 2 \Big(\frac{\hat{z}_\tau^6 - z_\tau^6}{z_\tau^6} \Big) \cdot \frac{z_\tau^1}{z_\tau^2} \cdot \frac{\hat{z}_\tau^1 \cdot D_{2,\tau}^{j,t} - \hat{z}_\tau^2 \cdot D_{1,\tau}^{j,t}}{(\hat{z}_\tau^1)^2} + \\ WL_7 \cdot 2 \cdot \Big(\frac{\hat{z}_\tau^7 - z_\tau^7}{z_\tau^7} \Big) \cdot \frac{1}{z_\tau^7} \cdot (D_{3,\tau-1}^{j,t} - D_{3,\tau}^{j,t}) \Big) + \\ \lambda_t - \frac{\mu u_t^j - \mu o_t^j}{NVS_t} - \Big(\frac{\nu u_t^j - \nu o_t^j}{NVS_t} - \frac{\nu u_{t+1}^j - \nu o_{t+1}^j}{NVS_t} \Big) = 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}, j \in \{1, \ldots, J\}.$$

Term (5.17) fällt in den Gleichungen für $t = te$ natürlich weg, da die Ungleichungen ku und ko für $te + 1$ nicht existieren.

Ein reguläres lokales Minimum der Funktion f aus (5.1) unter den gegebenen Nebenbedingungen muß also notwendigerweise die Gleichungen (5.14) und (5.9) sowie (5.15) und (5.16) erfüllen. Dieses System ist nichtlinear in den Variablen $(NVS_t, \lambda_t, \mu u_t^j, \mu o_t^j, \nu u_t^j, \nu o_t^j)$, nach denen es zu lösen ist. Die Nichtlinearitäten sind die Gleichungen (5.15) und (5.16) sowie der Teil in (5.14), der die Anpassung des Anlegungsgrades berührt, da in dem Nenner $(\hat{z}_\tau^1)^2$ die Variablen NVS_t^j enthalten sind.

Um mit diesem Lösungsansatz eine Kollektivzusammensetzung zu finden, die die Zielfunktion minimieren könnte, muß also eine Lösung eines Systems aus nichtlinearen Gleichungen und Ungleichungen bestimmt werden. Die

Größenordnung des Systems ist die folgende:

	Typ	Anzahl
Variable	NVS_t^j	$J \cdot (te - ta + 1)$
	λ_t	$(te - ta + 1)$
	$\mu u_t^j, \mu o_t^j$	$2 \cdot J \cdot (te - ta + 1)$
	$\nu u_t^j, \nu o_t^j$	$2 \cdot J \cdot (te - ta)$
Gleichungen	(5.14)	$J \cdot (te - ta + 1)$
	(5.9)	$(te - ta + 1)$
	(5.15)	$2 \cdot J \cdot (te - ta + 1)$
	(5.16)	$2 \cdot J \cdot (te - ta)$
Ungleichungen	Nichtnegativitätsbedingungen für $\mu u_t^j, \mu o_t^j$	$2 \cdot J \cdot (te - ta + 1)$
	$\nu u_t^j, \nu o_t^j$	$2 \cdot J \cdot (te - ta)$

Tabelle 5.I: Problemgröße des formalen Ansatzes

Die Größenordnung liegt also etwa bei $(te - ta + 1) \cdot (5 \cdot J + 1)$ Variablen und Gleichungen sowie $4 \cdot J \cdot (te - ta + 1)$ Ungleichungen. Bei den benötigten Dimensionen (Zeithorizont $\approx$ 30–40, Anzahl der Sparer 10–20) bedeutet das zwischen 1500 und 4000 Variable und Gleichungen. Diese Größenordnungen sind für numerische Verfahren zur Lösung nichtlinearer Systeme schwierig. Als weiteres Problem kommt hinzu, daß die Verifizierung von Lösungen dieses Ansatzes als lokale Minima anhand der entsprechenden Bedingungen zweiter Ordnung u.U. nicht möglich ist, da es sich hierbei nicht um notwendige und hinreichende sondern lediglich um hinreichende Bedingungen handelt.

Nach den obigen Ausführungen kann man also nicht erwarten, daß sich mit dem formalen Ansatz in der Praxis numerische Lösungen berechnen lassen. Durch gewisse Modifikationen des Problems läßt sich die praktische Lösbarkeit jedoch herstellen. Diese Modifikationen werden nachfolgend dargestellt und es wird aufgezeigt, was sie für die Lösung bedeuten. Das Ziel der Modifikationen ist es, ein rein lineares System zu erhalten, denn in der linearen Programmierung stehen Verfahren zur Verfügung, die Probleme wesentlich größerer Dimensionen ohne Schwierigkeiten

lösen können.

Die Nichtlinearitäten des zu lösenden Systems sind durch die Einbeziehung des Anlegungsgrades in die Anpassung und die aus den Ungleichheitsbedingungen (5.10)–(5.13) resultierenden Gleichungen (5.15) und (5.16) gegeben. Durch einen Verzicht auf die Anpassung des Anlegungsgrades lassen sich die ersteren Nichtlinearitäten bereits eliminieren. Man kann dabei immer noch hoffen, daß der Anlegungsgrad durch die Anpassung der Bauspardarlehen und der Bauspareinlagen ebenfalls einigermaßen getroffen wird, obwohl Abweichungen der angepaßten Bauspardarlehen und Bauspareinlagen bei verschiedenen Vorzeichen zu deutlich höheren Abweichungen des Anlegungsgrades führen.

Ein lineares System kann man nun dadurch erhalten, daß in (5.14) die Terme weggelassen werden, die sich auf die Ungleichungen (5.10)–(5.13) beziehen. Diese Ungleichungen sind linear und können deswegen bei Verfahren der linearen Programmierung eigenständig berücksichtigt werden. Das zu lösende lineare System besteht dann also aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial f''}{\partial NVS_t^j} + \lambda_t = 0 \quad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\}, j \in \{1, \ldots, J\}, \tag{5.18}$$

den Gleichungen (5.9) und den Ungleichungen (5.10) bis (5.13). f'' bezeichnet dabei die Zielfunktion f', aus der die Anpassung des Anlegungsgrades herausgenommen wird.

Dieses lineare System läßt sich im Hinblick auf das ursprüngliche Problem gut interpretieren. Die Gleichungen (5.18) und (5.9) stellen gerade die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum der Funktion f'' unter den Nebenbedingungen (5.9) dar. Man verifiziert dies sofort aus dem Satz von Kuhn–Tucker durch Weglassen von $h(z)$. Zusätzlich werden die Nebenbedingungen (5.10) bis (5.13) einbezogen. Auf den ersten Blick könnte man der Täuschung unterliegen, daß auf diese Weise die gleiche Lösungsmenge bestimmt wird wie durch den vollen formalen Ansatz, da die gleichen Nebenbedingungen berücksichtigt werden.

Der Unterschied zwischen den beiden Lösungsmengen besteht jedoch in eventuellen Randlösungen. (5.18) und (5.9) bestimmen die Menge der stationären Punkte der Funktion f''', die durch Einschränkung von f'' auf den durch die Gleichungen (5.9) bestimmten affinen Unterraum des Definitionsbereiches entsteht. Durch die Einbeziehung der Ungleichungen (5.10)–(5.13) im linearen Programmierungsverfahren werden aus dieser Menge jene Lösungen ausgeschlos-

sen, die nicht in dem durch (5.10) (5.13) beschriebenen Polyeder liegen. Die Lösungsmenge des formalen Ansatzes kann jedoch zusätzlich Lösungen enthalten, die auf dem Rand des Polyeders liegen und nur deswegen ein lokales Minimum der Zielfunktion unter allen Nebenbedingungen darstellen, ohne in der Lösungsmenge von (5.18) und (5.9) zu liegen. Die folgende Abbildung verdeutlicht diesen Zusammenhang.

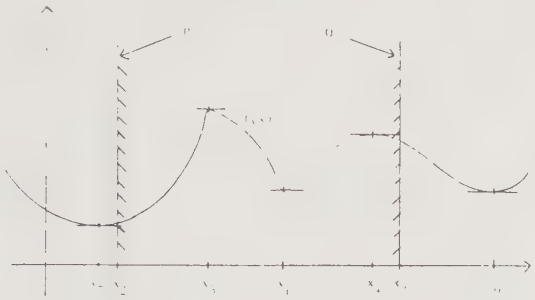

Abbildung 5.II

Die x —Achse stellt den Unterraum $NVS_t = \sum_{j=1}^{J} NVS_t^j$ für $t \in \{ta, \ldots, te\}$ dar, $f(x)$ die auf diesen Unterraum eingeschränkte Zielfunktion. Die Lösungsmenge des formalen Ansatzes für die notwendigen Bedingungen erster Ordnung unter den Nebenbedingungen $x \geq u, x \leq o$ ist $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. x_4 und x_5 könnten anhand der Bedingungen zweiter Ordnung als lokale Maxima erkannt werden und aus der Kandidatenmenge für lokale Minima ausgeschieden werden. Die durch den formalen Ansatz bestimmte Lösungsmenge ist also die Menge $\{x_1, x_2, x_3\}$ der lokalen Minima von $f(x)$ über dem gegebenem Unterraum.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems (5.18) wäre in diesem Fall gerade die Menge $\{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ der stationären Punkte von $f(x)$. x_4 und x_5 werden wiederum durch die Bedingungen zweiter Ordnung ausgeschieden. x_6 und x_7 fallen durch die Berücksichtigung der Ungleichungsnebenbedingungen $x \geq u, x \leq o$ weg. Die Lösungsmenge dieses vereinfachten Systems ist also $\{x_1\}$. Die lokalen Minima am Rand der durch $x \geq u, x \leq o$ beschriebenen Menge werden nicht erkannt. Somit besteht im allgemeinen schon ein wesentlicher Unterschied zwischen dem

vollen formalen Ansatz und der vereinfachten linearen Version (5.18), (5.10) (5.13). Lokale Minima am Rand der durch (5.10)-(5.13) bestimmten Menge werden aus der Lösungsmenge des formalen Ansatzes durch die Vereinfachung des Systems ausgeschlossen.

Ob Randlösungen lokale Minima der Zielfunktion sein können oder nicht, hängt im vorliegenden Spezialfall der bauspartechnischen Anwendung mit der quadratischen Zielfunktion von zwei generellen Fragen ab. Zum einen können die lokalen Minima von f'' über dem Unterraum $\sum_{j=1}^{J} NVS_t^j = NVS_t$ grundsätzlich nur auf dem Rand liegen, wenn der stationäre Punkt (bzw. der affine Unterraum, auf dem die Funktion stationär ist) kein lokales Minimum sondern Sattelpunkt ist. Dies hängt von der Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen der Funktion f'' ab.[1] Aber selbst wenn diese stationären Punkte lokale Minima sind, kann es sein, daß die Lösungen des formalen Ansatzes Randlösungen sind. Dieser Fall tritt ein, wenn die stationären Punkte der Funktion durch die Nebenbedingungen (5.10)-(5.13) aus der Lösungsmenge des formalen Ansatzes ausgeschlossen sind. Denn wenn die Lösungsmenge keine stationären Punkte enthält, liegen die lokalen Extrema notwendigerweise am Rand.

Die numerische Lösung des linearen Systems (5.18), (5.9), (5.10)- (5.13) kann mit dem Simplex-Algorithmus der linearen Programmierung ohne weiteres bewerkstelligt werden. Dieses System hat $(J + 1) \cdot (te - ta + 1)$ Gleichungs- und $2 \cdot J \cdot (te - ta)$ Ungleichungsnebenbedingungen. Die $2 \cdot J \cdot (te - ta + 1)$ oberen und unteren Schranken für die Variablen NVS_t^j können beim Simplex-Verfahren implizit berücksichtigt werden. Die Anzahl der Variablen beträgt $(J + 1) \cdot (te - ta + 1)$. Bei den praktischen Richtwerten eines Zeithorizonts von 30–40 und 10–20 Sparerschichten bedeutet das etwa 300–800 Variablen und Gleichungen und 600 bis 1600 Ungleichungen. Für existierende Software-Pakete zur linearen Programmierung wie etwa MPSX[2] von IBM oder APEX[3] von CDC ist dies höchstens eine mittlere Größenordnung.

---

[1] vgl. Luenberger, D. G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Reading- Menlo Park–London–Don Mills 1973, S. 235 f.

[2] vgl. IBM, IBM Mathematical Programming System Extended, 370 (MPSX/370), Basic Reference Manual, IBM-Publication SH19–1127–0, Paris 1976.

[3] vgl. CDC, APEX–III Reference Manual, Publication No. 76070000, Control Data Corporation 1979.

Bei diesem Lösungsansatz bleibt jedoch die Ungewißheit, ob nicht Randlösungen existieren. Das lineare Programm hat so viele Gleichungen wie Variable. Falls nicht einige der Gleichungen linear abhängig voneinander sind, bedeutet dies die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichungen, die aber eventuell wegen (5.10)-(5.13) unzulässig ist.

Für die Interpretation des Ergebnisses der linearen Programmierung gilt also folgendes. Findet das Simplex-Verfahren eine Lösung des Systems (5.18), (5.9), (5.10)-(5.13), so handelt es sich um einen stationären Punkt der auf den Unterraum $\sum_{j=1}^{J} NVS_t^j$ eingeschränkten Zielfunktion. Dieser ist ein lokales Minimum der Funktion f'', falls die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung[1] erfüllt sind. Dann ist dieser Punkt aber auch das globale Minimum der Optimierungsaufgabe, da eine quadratische Funktion höchstens einen stationären Punkt bzw. Lösungsraum haben kann. Sind die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung nicht erfüllt, so handelt es sich um einen Sattelpunkt der Funktion und die lokalen Minima sind Randlösungen, die mit diesem Verfahren nicht gefunden werden können. Findet das Simplex-Verfahren hingegen keine Lösung, so liegen die lokalen Minima der Funktion ebenfalls auf dem Rand der zulässigen Menge und können so nicht gefunden werden.

Eine befriedigende Antwort liefert dieses vereinfachte Verfahren also nur, wenn der stationäre Punkt der eingeschränkten Zielfunktion innerhalb der Menge liegt, die durch (5.10)-(5.13) beschrieben wird und wenn zusätzlich die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt sind. Darüber läßt sich nichts allgemeingültiges sagen, denn die Definitheit der Hesse-Matrix hängt in einer Weise von den $D_{l,t}^{j,s}$ ab, die keine allgemeingültigen Schlüsse zuläßt. Die Einträge $\frac{\partial^2 f}{\partial NVS_\tau^i \partial NVS_t^j}$ der Hesse-Matrix erhält man durch Differentiation der linken Seite von (5.14) nach NVS_τ^i unter Weglassung der Terme, die sich auf den Anlegungsgrad $\hat{z}_t^6$ sowie die Ungleichungsnebenbedingungen beziehen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial NVS_\tau^i \partial NVS_t^j} = 2 \cdot \sum_{\tau=\max(t,\tau)}^{te} \Big(\sum_{l=1}^{5} \frac{WL_l}{(z_\tau^l)^2} D_{l,\tau}^{j,t} \cdot D_{l,\tau}^{i,\tau} + \frac{WL_7}{(z_\tau^7)^2} (D_{3,\tau-1}^{j,t} - D_{3,\tau}^{j,t}) \cdot (D_{3,\tau-1}^{i,\tau} - D_{3,\tau}^{i,\tau}) \Big). \tag{5.19}$$

Diese Einträge sind alle positiv, da $D_{l,\tau}^{j,t} \geq 0$ für alle t, τ, l, j gilt und die Differenzen

[1] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 235.

$D^t_{3,r-1} - D^t_{3,r}$) ebenfalls nicht negativ sein können, weil sie für jede Sparerschicht die im Jahr r aus der Sparphase ausscheidenden Vertragssummen angeben. Ob eine Matrix mit nur positiven Eintragen positiv semidefinit ist, laßt sich nicht generell beantworten. (5.19) gibt aber auch nicht genügend Information her, um bekannte Kriterien für die Definitheit von Matrizen anzuwenden.

Selbst wenn man davon ausgeht, daß ein zulässiger stationärer Punkt ein lokales Minimum darstellt, kann die beschriebene Methode nicht befriedigen. Denn die Antwort auf die Frage, ob die stationären Punkte von f'' eingeschränkt auf (5.9) im zulässigen Bereich (5.10)-(5.13) liegen, hängt stark davon ab, wie eng die Ungleichungen die Lösungsmenge beschränken. Dabei ergibt sich der Konflikt, daß zusätzliche Information in Form von schärferen Schranken für die Anteile NVS^j_t die Wahrscheinlichkeit verringert, daß die Menge der zulässigen Lösungen diese stationären Punkte enthält.

Als Resumée läßt sich hieraus ziehen, daß der formale Lösungsansatz zwar zu zwei Verfahrensansätzen führt. Beide sind jedoch praktisch nicht von Bedeutung, denn der erste ist zwar theoretisch korrekt, praktisch jedoch nicht anwendbar. Der zweite Ansatz würde in vielen Fällen überhaupt keine Lösung liefern.

Sinnvoll ist es jedoch eventuell, lediglich das lineare Gleichungssystem (5.9), (5.18) ohne die Ungleichungsrestriktionen (5.10)-(5.13) zu lösen. Damit erhält man als Lösung einen stationären Punkt von f'' über dem Unterraum (5.9), der das globale Minimum darstellt, falls die Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt sind. Durch den Vergleich dieser Lösung mit einer anders erzielten Lösung, die (5.10)-(5.13) erfüllt, gewinnt man einen Anhaltspunkt, um wieviel schlechter die Anpassung der Zeitreihen durch die Hinzunahme der oberen und unteren Schranken sowie der Schwankungsbeschränkungen wird.

5.2.3.2 Konstruktion eines speziellen numerischen Lösungsverfahrens mit Methoden der nichtlinearen Programmierung

In diesem Abschnitt wird aus den allgemeinen Verfahren der nichtlinearen Optimierung ein spezielles Verfahren entwickelt, das die relativ einfach Struktur der Nebenbedingungen ausnutzt. Auf diese Weise gelingt es, die für den allgemeinen Fall kaum zu bearbeitende Größenordnung des Problems in den Griff zu bekommen. Es handelt sich dabei um ein Koordinatenabstiegsverfahren, das bei jeder Optimierung

über einzelne Koordinaten die Nebenbedingungen implizit berücksichtigt.

Zunächst werden das allgemeine Koordinatenabstiegsverfahren, das allgemeine Line Search-Verfahren und dessen spezielle Ausprägung als Verfahren des goldenen Schnitts erläutert. Es handelt sich dabei um Standard-Verfahren der mathematischen Optimierung, die in jedem einschlägigen Werk nachgeschlagen werden können. Sie werden hier dennoch kurz vorgestellt, da bei der speziellen Anwendung auf die bauspartechnischen Probleme immer wieder auf sie Bezug genommen werden muß .

5.2.3.2.1 Das allgemeine Koordinatenabstiegsverfahren

Die Idee des Koordinatenabstiegsverfahrens[1] liegt darin, die Minimierung einer Zielfunktion in mehreren Variablen auf die eindimensionale Minimierung zurückzuführen. Die Aufgabe

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} f(x_1,\ldots,x_n) \tag{5.20}$$

wird durch iterative eindimensionale Minimierung gelöst. Dabei werden jeweils $n-1$ Variable x_i auf ihrem gegenwärtigen Wert $\overline{x_i}$ festgehalten und der Wert x_k^* gesucht, der die eindimensionale Funktion

$$f^k(x_k) = f(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_{k-1}},x_k,\overline{x_{k+1}},\ldots,\overline{x_n}) \tag{5.21}$$

minimiert. Je nach Auswahl der Optimierungsvariablen x_k ergeben sich verschiedene Verfahren. Das zyklische Koordinatenabstiegsverfahren, das im folgenden benutzt wird, durchläuft die Variablen in der Reihenfolge $x_k, k = 1,\ldots,n$ und beginnt dann wieder mit x_1. Das 'double sweep'-Verfahren durchläuft die Variablen zunächst ebenfalls in der Reihenfolge $x_k, k = 1,\ldots,n$, danach jedoch in der umgekehrten Reihenfolge. Das Gauß-Southwell-Verfahren wählt als nächste Koordinate jeweils diejenige mit der absolut größten partiellen Ableitung. Es kann gezeigt werden[2], daß Koordinatenabstiegsverfahren für stetig differenzierbare Funktionen einen stationären Punkt finden, falls die Zielfunktion nicht unbeschränkt ist. Es ist jedoch möglich, daß es sich dabei um einen Sattelpunkt handelt Die Bedingungen zweiter Ordnung müssen also auch noch überprüft werden.

[1] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 158 f.

[2] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 159.

Verglichen mit anderen Methoden der nichtlinearen Optimierung zeigen Koordinatenabstiegsverfahren eine relativ geringe Konvergenzgeschwindigkeit.[1] Wegen der in der speziellen bauspartechnischen Anwendung einzuhaltenden Nebenbedingungen sind Methoden wie das Gradientenverfahren[2] oder das Newton-Verfahren[3] hier nicht geeignet.

5.2.3.2.2 Eindimensionale Optimierung (Line-Search)

Im Koordinatenabstiegsverfahren werden zyklisch eindimensionale Optimierungen in bezug auf die einzelnen Variablen durchgeführt. Dies ist ein Spezialfall des allgemeinen Line-Search Verfahrens, das eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ über einer beliebigen Geraden $x^0 + \alpha y^0$ minimiert. Es wird also die eindimensionale Optimierungsaufgabe $\min_\alpha f(x^0 + \alpha y^0)$ gelöst. Beim Koordinatenabstieg gilt $x^0 = 0, y^0 = e_k$, wobei e_k der k-te Einheitsvektor ist.

Als spezielle Voraussetzungen für den Line-Search ergeben sich hier die schwache Unimodalität der Zielfunktion und die Beschränkung des Definitionsbereiches auf ein Intervall. Unimodalität bedeutet, daß die Zielfunktion über dem Definitionsbereich $x^0 + \alpha y^0 = \alpha e_k$ entweder nur ein eindeutiges lokales Minimum oder ein aus lokalen Minima bestehendes Teilintervall besitzt. Dies ist wegen der quadratischen Zielfunktion richtig. Die Beschränkung des Definitionsbereiches ist durch die unteren und oberen Schranken der Neugeschäftsanteile gegeben.

Wegen der Schranken sind Methoden wie das Newton Verfahren [1] oder Regula falsi[5] nicht angebracht, da eine einmal erreichte Zulässigkeit der Lösung im weiteren Verlauf dieser Verfahren nicht unbedingt erhalten bleibt.

Wegen der schwachen Unimodalität der Zielfunktion über dem Suchintervall kann das Verfahren des goldenen Schnittes verwendet werden[6]. Es handelt sich hierbei um ein Intervallreduktionsverfahren mit dem Reduktionsfaktor $\delta =$

[1] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 159.

[2] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 148 ff.

[3] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 155 ff.

[4] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 137.

[5] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., S. 139.

[6] vgl. Luenberger, D. G., Introduction ..., a.a.O., s. 134 ff.

$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Das Verfahren konvergiert mit dieser Rate gegen das eindeutige lokale Minimum der Funktion über dem Anfangsintervall. Das bedeutet, daß durch jeden Schritt (Funktionsauswertung) das Intervall auf das δ —fache seiner ursprünglichen Länge reduziert wird. Für ein gegebenes Abbruchkriterium ϵ und eine anfängliche Intervallbreite L ist die Anzahl N der notwendigen Schritte also durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} & \epsilon = \delta^N \cdot L \\ \Leftrightarrow \quad & \delta^N = \frac{\epsilon}{L} \\ \Leftrightarrow \quad & N \log \delta = \log \epsilon - \log L \\ \Leftrightarrow \quad & N = \frac{\log \epsilon - \log L}{\log \delta}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

5.2.3.2.3 Die Berücksichtigung der bauspartechnischen Nebenbedingungen

Die Variablen, über die die Zielfunktion f aus (5.1) minimiert wird, sind die NVS_t^j mit $t \in \{ta, \ldots, te\}, j \in \{1, \ldots, J\}$. Für das Koordinatenabstiegsverfahren werden sie in der Reihenfolge

$$NVS_{ta}^1, \ldots, NVS_{ta}^J, NVS_{ta+1}^1, \ldots, NVS_{ta+1}^J, \ldots, NVS_{te}^1, \ldots, NVS_{te}^J$$

angeordnet, in der sie bei der Optimierung durchlaufen werden.

Jede einzelne Variable NVS_t^j unterliegt dabei den folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 1) \quad & NVS_t^j + \sum_{i \neq j} NVS_t^i = NVS_t \\ 2) \quad & NVS_t^j \geq US_t^j \cdot NVS_t \\ 3) \quad & NVS_t^j \leq OS_t^j \cdot NVS_t \\ 4,5) \quad & -\epsilon_t^j \leq \frac{NVS_t^j}{NVS_t} - \frac{NVS_{t-1}^j}{NVS_{t-1}} \leq \epsilon_t^j \qquad \text{falls } t > ta \\ 6,7) \quad & -\epsilon_{t+1}^j \leq \frac{NVS_t^j}{NVS_t} - \frac{NVS_{t+1}^j}{NVS_{t+1}} \leq \epsilon_{t+1}^j \quad \text{falls } t < te \end{aligned} \tag{5.23}$$

Für die Neugeschäftsanteile im ersten Jahr ta und im letzten Jahr te sind es also jeweils 5, für die übrigen Anteile jeweils 7 Nebenbedingungen, die eingehalten werden müssen.

Die Ungleichungsnebenbedingungen 4) bis 7) können durch Auflösung nach NVS_t^j in variable untere und obere Schranken umgewandelt werden:

4,5) $NVS_t \left(\frac{NVS_{t-1}^j}{NVS_{t-1}} - \epsilon_t^j \right) \leq NVS_t^j \leq NVS_t \left(\frac{NVS_{t-1}^j}{NVS_{t-1}} + \epsilon_t^j \right)$ falls $t > ta$

6,7) $NVS_t \left(\frac{NVS_{t+1}^j}{NVS_{t+1}} - \epsilon_{t+1}^j \right) \leq NVS_t^j \leq NVS_t \left(\frac{NVS_{t+1}^j}{NVS_{t+1}} + \epsilon_{t+1}^j \right)$ falls $t < te$

Diese Schranken sind variabel, da sie die Neugeschäftsanteile NVS_{t-1}^j bzw. NVS_{t+1}^j enthalten, die im Rahmen des Koordinatenabstiegs-Verfahrens variabel sind. Im Verlauf des Line- Searchs über NVS_t^j werden sie jedoch festgehalten. Deswegen wirken sie während dieser eindimensionalen Optimierung wie die festen Schranken US_t^j und OS_t^j.

Die Berücksichtigung der Nebenbedingungen (5.15) und (5.16) kann im Line-Search also einfach dadurch berücksichtigt werden, daß die Enden des Anfangsintervalls $[U_t^j, O_t^j]$ durch die Maxima bzw. Minima der oberen unteren Schranken aus 2)–7) beschränkt werden:

$$U_t^j \geq UNVS_t^j = NVS_t \cdot \max\{US_t^j, \frac{NVS_{t-1}^j}{NVS_{t-1}} - \epsilon_t^j, \frac{NVS_{t+1}^j}{NVS_{t+1}} - \epsilon_{t+1}^j\} \tag{5.24}$$

$$O_t^j \leq ONVS_t^j = NVS_t \cdot \min\{OS_t^j, \frac{NVS_{t-1}^j}{NVS_{t-1}} + \epsilon_t^j, \frac{NVS_{t+1}^j}{NVS_{t+1}} + \epsilon_{t+1}^j\}. \tag{5.25}$$

Die Berücksichtigung der Gleichungsbedingung 1) erfordert einen Ausgleich jeder Veränderung von NVS_t^j durch die Anteile $NVS_t^i, i \neq j$ der anderen Sparerschichten im betrachteten Jahr t. Im Line-Search über NVS_t^j müssen also auch die anderen Variablen des Jahres t verändert werden, um die Zulässigkeit der Lösung zu erhalten.

Insofern kann das Gesamtverfahren kein reines Koordinatenabstiegsverfahren sein, denn mit jeder Koordinate NVS_t^j müssen jeweils $J - 1$ andere Koordinaten variiert werden. Für diese Variation gibt es viele Freiheitsgrade, denn es muß lediglich die Bedingung

$$1) \quad NVS_t^j + \sum_{i \neq j} NVS_t^i = NVS_t$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta NVS_t^j = -\sum_{i \neq j} \Delta NVS_t^i \tag{5.26}$$

erfullt werden. Δ bezeichnet dabei die Änderung der Variablen. Anschaulich bedeutet das die Auswahl einer Geraden (eindimensionaler affiner Unterraum) aus der Hyperebene 1), über der der Line-Search durchgeführt wird.

Die Notwendigkeit der Änderung der Neugeschäftsanteile impliziert weitere Beschränkungen des Anfangsintervalls $[\upsilon_t^j, o_t^j]$ für die Optimierung, denn für jede zu verändernde Variable müssen die Ungleichunsnebenbedingungen (5.23) 2)–7) ebenfalls eingehalten werden. Aus diesem Grund werden die oberen und unteren Schranken für alle Neugeschäftsanteile im Jahr t entsprechend (5.24) und (5.25) ausgerechnet:

$$UNVS_t^i = NVS_t \cdot \max\{US_t^i, \frac{NVS_{t-1}^i}{NVS_{t-1}} - \epsilon_t^i, \frac{NVS_{t+1}^i}{NVS_{t+1}} - \epsilon_t^i\} \text{ für alle } i \neq j \quad (5.27)$$

$$ONVS_t^i = NVS_t \cdot \min\{OS_t^i, \frac{NVS_{t-1}^i}{NVS_{t-1}} + \epsilon_t^i, \frac{NVS_{t+1}^i}{NVS_{t+1}} + \epsilon_t^i\} \text{ für alle } i \neq j \quad (5.28)$$

Die Enden des Anfangsintervalls $[\upsilon_t^j, o_t^j]$ müssen nun so abgeändert werden, daß durch eine Erhöhung von NVS_t^j bis auf o_t^j und die dadurch induzierte Erniedrigung der Variablen $NVS_t^i, i \neq j$ keine der unteren Schranken $UNVS_t^i, i \neq j$ verletzt wird. Entsprechendes gilt für eine Erniedrigung von NVS_t^j und die oberen Schranken $ONVS_t^i, i \neq j$.

Hier werden nun zwei Ausgleichsmechanismen betrachtet, die Methoden des gleichmäßigen und des proportionalen Ausgleichs. Der erstere verändert alle Variablen $NVS_t^i, i \neq j$, die gegenwärtig mindestens um δ von ihren Schranken $UNVS_t^i, ONVS_t^i$ entfernt sind, um den gleichen Betrag Δ. Wird NVS_t^j also um Δ^j verändert, so werden die anderen Variablen um $\Delta = \frac{\Delta^j}{m}$ verändert. m ist dabei die Zahl der veränderten Variablen. Diese kann kleiner als $J - 1$ sein, falls einige der Variablen dichter an den Schranken liegen, als die im Algorithmus hierfür vorgesehene Toleranz δ:

$$NVS_t^i, i \neq j \text{ wird verändert} \Leftrightarrow (ONVS_t^i - NVS_t^i > \delta \wedge NVS_t^i - UNVS_t^i > \delta).$$

Ohne diese Mindestvariation δ wäre eine Veränderung von NVS_t^j bereits dann nicht mehr möglich, wenn einer der Neugeschäftsanteile im Jahr t auf einer seiner Schranken $UNVS_t^i, ONVS_t^i, i \neq j$ liegt. Die maximalen Veränderungen Δ_-^j, Δ_+^j von NVS_t^j nach unten und oben ergeben sich bei dieser Ausgleichstechnik folgendermaßen. Bezeichne M die Menge der Indizes $i \neq j$ für die gilt:

$$ONVS_t^i - NVS_t^i > \delta \wedge NVS_t^i - UNVS_t^i > \delta$$

und m die Kardinalität dieser Menge. Dann ist:

$$\Delta^j_- = m \cdot \min_{i \in M} \{ONVS^i_t - NVS^i_t\}$$
$$\Delta^j_+ = m \cdot \min_{i \in M} \{NVS^i_t - UNVS^i_t\}.$$

Das Anfangsintervall wird also durch die Einbeziehung der Schranken $NVS^j_t + \Delta^j_+$ und $NVS^j_t + \Delta^j_-$ in die Maximum- und Minimumbildungen (5.24) und (5.25) berechnet:

$$U^j_t = \max\{UNVS^j_t, NVS^j_t - \Delta^j_-\} \tag{5.24)'}$$
$$O^j_t = \min\{ONVS^j_t, NVS^j_t + \Delta^j_+\} \tag{5.25)'}$$

Ein offenkundiger Nachteil dieser einfachen Ausgleichstechnik ist, daß die maximal mögliche Veränderung von NVS^j_t hier durch den kleinsten Abstand der Ausgleichsvariablen $NVS^i_t, i \neq j$ zu ihren Schranken festgelegt wird. Liegt also auch nur eine der Variablen nahe an einer Schranke, so kann NVS^j_t nur wenig verändert werden. Da die Schrittzahl des Verfahrens gemäß (5.22) um so kleiner ist, je kleiner das Anfangsintervall ausfällt, hat diese geringe Variationsmöglichkeit für NVS^j_t im einzelnen Line-Search Vorteile.

Der zweite Ausgleichsmechanismus (proportionaler Ausgleich) wird nun gerade so konstruiert, daß die maximal möglichen Veränderungen der Variablen $NVS^i_t, i \neq j$ voll ausgenutzt werden. Damit wird der erwähnte Nachteil des ersten Ausgleichsmechanismus behoben. Dazu bezeichnen Δ^i_+ und Δ^i_- die jeweils möglichen Veränderungen der Variablen $NVS^i_t, i \neq j$ nach oben und nach unten:

$$\Delta^i_+ = ONVS^i_t - NVS^i_t \qquad \text{für } i \neq j \tag{5.29}$$
$$\Delta^i_- = NVS^i_t - UNVS^i_t \qquad \text{für } i \neq j \tag{5.30}$$

Die maximal möglichen Bewegungen von NVS^j_t nach unten und oben sind dann gerade die Summe der entgegengesetzten Bewegungsmöglichkeiten der Ausgleichvariablen:

$$\Delta^j_- = \sum_{i \neq j} \Delta^i_+ \tag{5.31}$$
$$\Delta^j_+ = \sum_{i \neq j} \Delta^i_- \tag{5.32}.$$

Das Anfangsintervall für den Line-Search ergibt sich wieder aus (5.21)' und (5.25)'.

Der Ausgleich erfolgt für alle Variablen NVS_t^i mit den Proportionalitätsfaktoren $\frac{\Delta_-^i}{\Delta_+^j}$ bzw. $\frac{\Delta_+^i}{\Delta_-^j}$, je nachdem, ob NVS_t^j erhöht wird oder erniedrigt. Eine Veränderung von NVS_t^j um d induziert also folgende Werte der Ausgleichsvariablen:

$$NVS_t^i - \frac{\Delta_-^i}{\Delta_+^j} \cdot d \qquad \text{falls } d \geq 0 \quad \text{für alle } i \neq j$$

$$NVS_t^i - \frac{\Delta_+^i}{\Delta_-^j} \cdot d \qquad \text{falls } d \leq 0 \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Nach Konstruktion (5.30) summieren sich die Proportionalitätsfaktoren zu 1. Damit wird der Ausgleich gerade hergestellt.

Eine Bemerkung muß zu diesem zweiten Ausgleichsverfahren gemacht werden. Durch die unterschiedliche Behandlung der Erhöhung und Erniedrigung der Optimierungskoordinate NVS_t^j mit unterschiedlichen Proportionalitätsfaktoren wird das Konzept des Line-Search im engeren Sinne verlassen. Die Optimierung der Funktion erfolgt nicht über einer Geraden, sondern über zwei Halbgeraden, die ihren Ursprung im Punkt $NVS_\tau^l, \tau \in \{ta,\ldots,te\}, l \in \{1,\ldots,J\}$ haben. Nur in Ausnahmefällen werden diese Halbgeraden die gleiche Steigung haben, so daß es sich dann wieder um einen Line-Search im engeren Sinne handelt.

Diese unterschiedliche Behandlung von $d \geq 0$ und $d \leq 0$ ist notwendig, da die gegenwärtigen Werte der Ausgleichsvariablen im allgemeinen nicht an der gleichen relativen Position in ihren Zulässigkeitsintervallen liegen. Die folgende Abbildung macht das Problem deutlich:

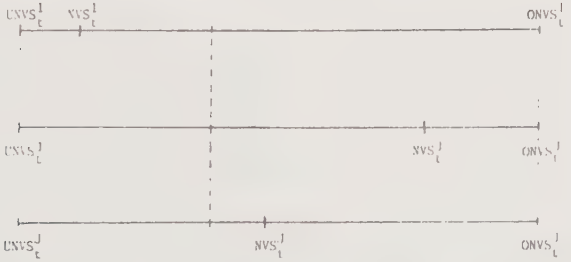

Abbildung 5.III

Die Zulässigkeitsintervalle für die Ausgleichsvariablen wurden hier so gestaucht bzw. gedehnt, daß sie die gleiche Länge haben. Um die vollen Möglichkeiten der Erhöhung der Ausgleichsvariablen auszuschöpfen, müssen sie mit unterschiedlichen

Faktoren verändert werden, damit sie gleichzeitig ihre oberen Schranken erreichen. Das gleiche gilt für die Verringerung der Variablen. Ein einheitlicher Faktor für die Erhöhung und Erniedrigung ergäbe sich nur, wenn die gegenwärtigen Werte alle die gleiche relative Lage in den Zulässigkeitsintervallen hätten, also auf einer hypothetischen Linie wie in der Abbildung dargestellt lägen. Nur dann entspricht das Suchverfahren dem engeren Konzept des Line-Search.

Im Vergleich zum ersten Ausgleichsverfahren sind die Anfangsintervalle hier größer und somit die Schrittzahl des Verfahrens des goldenen Schnittes höher. Ob die möglichen Vorteile bei der Anzahl der nötigen Koordinatenzyklen diesen Nachteil aufwiegen, läßt sich theoretisch nicht analysieren. Bei einem solchen Vergleich ist man auf numerische Testläufe angewiesen, die in Abschnitt 5.2.5.1 durchgeführt werden.

Das vorgestellt Koordinatenabstiegsverfahren geht von einer zulässigen Lösung NVS_t^j aus, die dann so verändert wird, daß die Zulässigkeit erhalten bleibt. Dazu wird also zunächst eine Startlösung benötigt, die die Nebenbedingungen (5.9), (5.10)–(5.13) erfüllt. Falls die Schranken (5.10), (5.11) und die Schwankungsbeschränkungen (5.12), (5.13) trivial sind, läßt sich eine solche Anfangslösung einfach konstruieren. Wenn jedoch wesentliche Information in den Nebenbedingungen steckt, läuft das Finden einer Anfangslösung auf die Lösung eines linearen Programmes hinaus. Daher wird die Phase I des zweiphasigen Simplex-Algorithmus benutzt, um eine zulässige Startlösung zu erzeugen[1].

5.2.3.3 Linearisierung der Zielfunktion

Im Abschnitt 5.2.2.2 wurde die Form der Zielfunktion erläutert und die spezielle Wahl des quadratischen Funktionstyps begründet. Insbesondere wurde sie mit der Summe der absoluten Abweichungen der angepaßten Zielgrößen von den realisierten verglichen und vorgezogen, da sie "Ausreißer" in der Anpassung besonders stark bewertet.

Angesichts der Probleme bei der Konstruktion eines Verfahrens zur Lösung der Optimierungsaufgabe ist es jedoch angebracht, durch eine Modifikation der Problemstellung auch die effizienten Verfahren der linearen Programmierung zur

[1] vgl a.B. Dantzig, G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton, New Jersey, 1963, S. 100-111.

Anwendung zu bringen. Das abgewandelte Koordinatenabstiegsverfahren der nichtlinearen Programmierung unter Verwendung des Line-Search Verfahrens des goldenen Schnittes ist in der praktischen Anwendung extrem rechenaufwendig, während der Simplex-Algorithmus der linearen Programmierung für die betrachtete Problemgröße schnell und zuverlässig arbeitet.

Ein Nachteil dieses Ansatzes besteht natürlich darin, daß keine Nichtlinearitäten berücksichtigt werden können. Insbesondere kann der Anlegungsgrad nicht eigenständig in die Zielfunktion aufgenommen werden, sondern nur mittelbar über seine Komponenten Bauspardarlehen und Bauspareinlagen erfaßt werden. Die Zielfunktion lautet nun also:

$$\sum_{l=1}^{L} WL_l \sum_{t=ta}^{te} WT_t \left| \frac{\hat{z}_t^l - z_t^l}{z_t^l} \right| \tag{5.33}$$

Da eine Behandlung von Absolutbeträgen in der Zielfunktion nur durch eine bestimmte Technik möglich ist, müssen die neuen Variablen

$$R_t^l = \frac{\hat{z}_t^l - z_t^l}{z_t^l}$$

eingeführt werden. Zu den Definitionsgleichungen (5.4) und (5.8) für die $\hat{z}_t^l$ kommen nun also noch die linearen Definitionsgleichungen

$$\hat{z}_t^l - z_t^l \cdot R_t^l = z_t^l \qquad \text{für } t \in \{ta, \ldots, te\} \text{ und } l \in \{1, \ldots, 5, 7\} \tag{5.34}$$

hinzu. Das verbleibende lineare Programm hat dann die abstrakte Form

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i \mid x_i \mid \tag{5.35}$$

$$\underline{\text{unter:}}\ Ax \leq b \tag{5.36}$$

$$\underline{\text{mit:}}\ c \geq 0.$$

Probleme dieser Form können leicht so umformuliert werden, daß sie einer Bearbeitung mit dem Simplex-Algorithmus zugänglich sind. Wegen der dabei notwendigen Aufspaltung der Variablen in positive und negative Teilvariablen verdoppelt sich für dieses Problem die Zahl der Variablen.

Im vorliegenden Spezialfall sind die c_i entweder $WT_t \cdot WL_l$ für die Variablen R_t^l oder 0 für alle anderen Variablen. Die Lösung der bauspartechnischen

Minimierungsaufgabe mit der Zielfunktion (5.31) erfolgt also durch die Lösung des linearen Programmes:

$$\min \sum_{t=ta}^{te} \sum_{l=1}^{L} WT_t \cdot WL_l \cdot (RP_t^l + RM_t^l) \tag{5.37}$$

unter:

$$\hat{z}_t^l - z_t^l \cdot RP_t^l + z_t^l \cdot RM_t^l = z_t^l \text{ für } t \in \{ta, \ldots, te\}, l \in \{1, \ldots, L\} \tag{5.38}$$

sowie den bekannten linearen Nebenbedingungen (5.4), (5.8) (5.13) (vgl. Abschnitt 5.2.3).

Da die $\hat{z}_t^l$ nur in den Gleichungen (5.38) und ihren Definitionsgleichungen (5.4), (5.8) vorkommen, können sie durch Einsetzen dieser Definitionsgleichungen in (5.38) eliminiert werden. Auf diese Weise werden $L \cdot (te - ta + 1)$ Variable und Gleichungen eingespart.

Die Größenordnung dieses linearen Systems ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Hierbei wurde wieder davon ausgegangen, daß die oberen und unteren Schranken (5.10), (5.11) implizit berücksichtigt werden.

	Typ	Anzahl
Variable	NVS^j	$J \cdot (te - ta + 1)$
	RP_t^l	$L \cdot (te - ta + 1)$
	RM_t^l	$L \cdot (te - ta + 1)$
Gleichungen	(5.38)	$L \cdot (te - ta + 1)$
	(5.9)	$(te - ta + 1)$
Ungleichungen	(5.12), (5.13)	$2 \cdot J \cdot (te - ta)$

Tabelle 5.IV: Problemgröße bei linearisierter Zielfunktion

Dies sind zusammen also $(J + 2L) \cdot (te - ta + 1)$ Variable und ungefähr $(2J + L + 1) \cdot (te - ta + 1)$ Nebenbedingungen. Bei den bislang unterstellten realistischen Werten von $L = 6, J \approx 10 - 15, (te - ta + 1) \approx 30 - 40$ bedeutet das etwa 650–1100 Variable und 800–1500 Nebenbedingungen. Diese Größenordnung ist von den erwähnten Softwarepaketen zur linearen Programmierung [1] ohne weiteres zu bearbeiten.

[1] IBM, MPSX/370 ..., a.a.O. —CDC, APEX-III ..., a.a.O..

Zu dem anfangs bereits erwähnten Nachteil, daß der Anlegungsgrad und andere nichtlineare Zielgrößen mit diesem Ansatz nicht erfaßt werden können, kommt noch ein weiterer Nachteil hinzu, der mit der Linearisierung des Problems zusammenhängt. Die optimalen Lösungen linearer Programme, die der Simplex-Algorithmus findet, sind immer Ecklösungen. Ecklösungen haben die Eigenschaft, daß viele der Variablen (mindestens alle Nichtbasisvariablen) den Wert Null haben. So ist es möglich, daß in der berechneten Optimallösung viele Sparerschichtenanteile gleich Null sind. Insbesondere wird dies auftreten, wenn in Ermangelung besserer Kenntnisse die unteren Schranken für die Anteile auf Null gesetzt werden. In der Lösung hat man dann den unrealistischen Effekt, daß nur einige der Sparerschichten im Kollektiv vorkommen.

5.2.3.4 Die Berücksichtigung weiterer Zielgrößen bei der Anpassung

Die drei Lösungskonzepte, die in 5.2.3.1 bis 5.2.3.3 vorgestellt wurden, sind so allgemein gehalten, daß es nicht schwer fällt, weitere anzupassende Zielgrößen einzubeziehen.

Im formalen Lösungsansatz sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden. Falls sich die zusätzlich anzupassenden Zeitreihen wie die Bauspareinlagen, Bauspardarlehen, Vertragssummenbestände und der Spargeldeingang einfach als gewichtete Summe der Beiträge $D_{l,t}^{j,s}$ der einzelnen Sparerschichten zusammensetzt, so ergeben sich keinerlei Schwierigkeiten. In der Formulierung der Minimierungsaufgabe (5.1) unter den Nebenbedingungen (5.4), (5.5),(5.8)–(5.13) werden in (5.4) die entsprechenden Definitionsgleichungen hinzugefügt. In der Zielfunktion (5.1) wird die Summierung über l entsprechend erweitert. Bei allen Berechnungen wird diese Erweiterung dann analog zu den $\hat{z}_t^1, \ldots, \hat{z}_t^5$ behandelt.

Probleme im formalen Lösungsansatz tauchen lediglich dann auf, wenn die Definitionsgleichungen für die zusätzlich anzupassenden Größen weitere Nichtlinearitäten im System erzeugen, wie die Definition des Anlegungsgrades. Im Kuhn-Tucker-Ansatz treten keine formale Schwierigkeiten auf, solange die Definitionsgleichungen differenzierbar sind. Die ohnehin schon geringe Aussicht auf eine numerische Lösung wird dadurch jedoch noch geringer. In der linearisierten Form, die den Methoden der linearen Programmierung zugänglich sein soll, können solche Zielgrößen ebenso wie der Anlegungsgrad jedoch nicht berücksichtigt werden.

Für das modifizierte Koordinatenabstiegsverfahren zur numerischen Lösung der Minimierungsaufgabe ergibt sich in keinem Fall eine Schwierigkeit. Die zusätzlich anzupassenden Größen müssen lediglich bei der Funktionsauswertung mit berechnet und in die Zielfunktion aufgenommen werden. Je nach Definitionsgleichung werden dazu die Einzelbeiträge $D_{i,t}^{j,s}$ benötigt, oder die Größen lassen sich wie der Anlegungsgrad und die aus der Sparphase ausscheidenden Vertragssummen aus den anderen Anpassungen berechnen. Das Konvergenzverhalten des Verfahrens kann durch zusätzliche Nichtlinearitäten jedoch sehr negativ beeinflußt werden.

Für den Ansatz mit der linearisierten Zielfunktion, in die die Absolutbeträge der prozentualen Abweichungen der angepaßten von den realisierten Werten eingehen, statt deren Quadrate, treffen die gleichen Überlegungen zu wie für den Kuhn-Tucker-Ansatz . Zusätzlich anzupassende Größen können dann und nur dann berücksichtigt werden, wenn sich ihre Definitionsgleichungen in eine Form bringen lassen, die linear in den Variablen des Problems ist.

5.2.4 Die Aussagekraft gefundener Lösungen

In diesem Abschnitt werden die zwei wesentlichen Aspekte der Ergebnisse der Lösungsverfahren untersucht. Zum einen geht es um die Frage, welche Rückschlüsse die Lösungen auf die wahre Kollektivzusammensetzung zulassen (Identifizierbarkeit der Kollektivzusammensetzung). Zum anderen interessiert die Prognosequalität des gefundenen Bestandsanpassungsmodells.

5.2.4.1 Die Identifizierbarkeit der Kollektivzusammensetzung

Die Sparerschichtenstruktur, die als Lösung jedes der vorgestellten Verfahren erzielt wird, ist nicht nur im Hinblick auf Prognoserechnungen interessant, sondern vermittelt für sich genommen bereits einen Einblick in die Wirkungsstrukturen des Bausparkollektivs. Sie ist also auch an und für sich eine wertvolle Information und kann als Grundlage geschäftspolitischer Entscheidungen dienen. Dafür kommt es jedoch entscheidend darauf an, wie verläßlich diese Information ist, d. h. in welchem Maß und unter welchen Voraussetzungen man sich darauf verlassen kann, daß die Lösung des mathematischen Optimierungsproblems mit der tatsächlichen Kollektivzusammensetzung übereinstimmt.

Als erstes muß bei solchen Überlegungen berücksichtigt werden, daß die modellmäßige Abbildung gegenüber der Realität gewisse Abweichungen enthält. Es besteht hier zwar nicht wie z.B. bei den Regressionsansätzen der Ökonometrie die grundsätzliche Unsicherheit darüber, ob der gewählte Funktionstyp mit den realen Wirkungszusammenhängen überhaupt übereinstimmt. Durch die Simulationstechnik bei den einzelnen Sparerschichten ist die prinzipielle Funktionsweise des Systems Bausparkollektiv richtig erfaßt. In der Ökonometrie hingegen bleibt etwa bei der Schätzung von gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktionen immer die Frage offen, ob die realen Abläufe den ökonomischen Theorien entsprechen, die hinter den Regressionsansätzen beispielsweise der Cobb-Douglas- oder der CES-Produktionsfunktion stehen.[1)]

Ein wesentliches Element der Bausparwirklichkeit muß in der modellmäßigen Abbildung jedoch vernachlässigt bzw. vereinfacht werden. Es handelt sich dabei um die Unregelmäßigkeiten der Spareinzahlungen. Bausparer ändern in der Realität ihr Sparverhalten oft mehrmals während ihrer Sparphase. Sie leisten Sonderzahlungen, ändern ihre regelmäßig entrichtete Rate oder stellen die Sparzahlungen ganz ein. Eine Vielzahl von individuellen Gründen sind hierfür denkbar. Es ist natürlich nicht möglich, diese volle Variabilität der Spareinzahlungen im Modell abzubilden, da sonst zu viele Variablen eingefürt werden müßten, die jegliche Struktur im Modell zunichte machen würden. Auf der anderen Seite ist unklar, wie sehr Variationen des Sparverhaltens in der Vergangenheit die Bestände der Bausparkassen beeinflußt haben. Bei den Bausparkassen selbst liegen relativ wenig Statistiken darüber vor, wie groß der Anteil solcher "Wechselsparer" am Kollektiv ist.

In einem Bestandsanpassungsmodell können sinnvollerweise nur solche Unregelmäßigkeiten in Form von Sparerschichten berücksichtigt werden, die gewissen Gesetzmäßigkeiten gehorchen wie Soforteinzahlungen, Einmaleinzahlungen vor Zuteilung, Einstellung der Sparraten bei Erreichen eines bestimmten Anspargrades oder eine Anbindung der Ratenhöhe an den externen Marktzinssatz. Mit dieser Beschränkung werden also reale Vorgänge aus dem Modell ausgeschlossen, deren Auswirkungen nur grob abgeschätzt werden können. Je stärker solche Elemente in einem Bausparkollektiv enthalten sind, um so weniger kann eine Lösung des mathematischen Problems mit dem tatsächlichen Kollektiv übereinstimmen.

[1)] vgl. z.B. Krelle, W., Produktionstheorie, Tübingen 1969, S. 142–161.

Aber selbst wenn man unterstellt, daß die modellmäßige Abbildung die Realität vollständig abdeckt — d.h. alle in der Realität existierenden Sparerschichten werden in die Bestandsanpassung einbezogen —, bleibt ein Identifizierbarkeitsproblem.[1] Beobachtet werden in der Realität zunächst nur die kollektiven Aggregate z_t^l. Aus diesen soll auf die Kollektivzusammensetzung geschlossen werden. Nun ist es aber denkbar, daß verschiedene Kollektivzusammensetzungen

$$^aNVS = (^aNVS_t^j)_{t\in\{ta,\ldots,te\}}^{j\in\{1,\ldots,J\}} \text{ und } ^bNVS = (^bNVS_t^j)_{t\in\{ta,\ldots,te\}}^{j\in\{1,\ldots,J\}}$$

die gleichen Aggregate z_t^l induzieren. Bei Vorliegen solcher Aggregate könnte also nicht zwischen ^aNVS und ^bNVS diskriminiert werden. ^aNVS und ^bNVS heißen dann beobachtungsäquivalente Strukturen. Das würde natürlich bedeuten, daß auf das Ergebnis eines Lösungsverfahrens kein Verlaß ist. Es könnten ebensogut andere Kollektivzusammensetzungen zugrundeliegen, die die gleiche Anpassung erzeugen.

Im folgenden wird nun untersucht, ob und wann solche Identifikationsprobleme auftreten. Ferner wird untersucht, inwieweit diese Probleme durch identifizierende Restriktionen [2] behoben werden können. Unter der obengenannten Voraussetzung (Abdeckung aller realen Sparerschichten im Modell) sind die kollektiven Aggregate z_t^l Funktionen der Kollektivzusammensetzung NVS_t^j und der Beiträge $D_{l,t}^{j,s}$ der einzelnen Sparerschichten zu den Aggregaten z_t^l :

$$z_t^l = f(D_{l,t}^{j,s}; NVS_t^j) = \sum_{s=ta}^{t}\sum_{j=1}^{J} NVS_s^j \cdot D_{l,t}^{j,s}. \tag{5.39}$$

Der Anlegungsgrad z_t^0 gehorcht (5.39) nicht. Er kann aus den Betrachtungen dieses Abschnitts weggelassen werden, da er eine Funktion der Bauspareinlagen z_t^1 und der Bauspardarlehen z_t^2 ist. Aus Gründen der Vereinfachung werden die Aggregate und die Kollektivzusammensetzung hier zu Vektoren zusammengefaßt. z sei der Vektor

$$z = (z_{ta}^1,\ldots,z_{ta}^L,z_{ta+1}^1,\ldots,z_{ta+1}^L,\ldots,z_{te}^1,\ldots,z_{te}^L)^T$$

aller betrachteten Aggregate. Er hat die Länge $L\cdot T = L\cdot(te-ta+1)$. Mit x wird der Vektor

$$x = (NVS_{ta}^1,\ldots,NVS_{ta}^J,\ldots,NVS_{te}^1,\ldots,NVS_{te}^J)^T$$

[1] vgl. z.B. Schönfeld, P., Methoden der Ökonometrie, Bd. I und II, München 1971, 15. Kapitel, Bd. II, S. 185–217.

[2] vgl. Schönfeld, P., Methoden ..., a.a.O., Bd. II, S. 204 ff.

der Kollektivzusammensetzung bezeichnet. Er hat $J \cdot T$ Komponenten. D bezeichnet die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} D_{1,ta}^{1,ta} & D_{1,ta}^{J,ta} & 0 & & 0 \\ D_{l,t}^{1,ta} & & D_{l,t}^{J,t} & 0 & 0 \\ D_{L,te}^{1,ta} & D_{L,te}^{J,ta} & & D_{L,te}^{1,te} & D_{L,te}^{J,te} \end{pmatrix}$$

der Größe $(L \cdot I) \times (J \cdot I)$. Mit diesen Bezeichnungen kann (5.39) in kompakter Weise geschrieben werden als:

$$Z = D \cdot X \,. \tag{5.40}$$

Mit NVS wird der Vektor bezeichnet, der die gesamten Neugeschäfte der Jahre *ta* bis *te* enthält:

$$NVS = (NVS_{ta}, \ldots, NVS_{te})^T \,.$$

Die Nebenbedingungen (5.9) lassen sich dann schreiben als:

$$NVS = \mathrm{II} \cdot X \,,$$

wobei II die Matrix bezeichnet, die gerade die Neugeschäfte der einzelnen Jahre aufsummiert:

$$\underset{T \times (J \cdot T)}{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 & & & 0 \\ & 1 \ldots 1 & & \\ & & 1 \ldots 1 & \\ & & & \\ & 0 & & \\ & & & 1 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Bezieht man diese Summation in die Vektor-Matrix-Gleichung (5.40) ein, so erhält man die Aggregate des Kollektivs einschließlich Neugeschäft als:

$$\begin{pmatrix} Z \\ NVS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ \mathrm{II} \end{pmatrix} \cdot X. \tag{5.41}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit $(L+1) \cdot T$ Gleichungen in $J \cdot T$ Variablen. Ein Rückschluß von den beobachteten Aggregaten $\begin{pmatrix} Z \\ NVS \end{pmatrix}$ auf das Kollektiv X bedeutet die Lösung von (5.41) nach X. Ein Identifikationsproblem besteht hier also genau dann, wenn (5.41) keine eindeutige Lösung X besitzt.

Die Aggregate $({}^{Z}_{NVS})_1$ und $({}^{Z}_{NVS})_2$ der Kollektivzusammensetzungen x_1 und x_2 sind gleich, wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
& ({}^{Z}_{NVS})_1 = ({}^{Z}_{NVS})_2 \\
\Leftrightarrow \quad & ({}^{D}_{\mathrm{II}})x_1 = ({}^{D}_{\mathrm{II}})x_2 \\
\Leftrightarrow \quad & ({}^{D}_{\mathrm{II}})(x_1 - x_2) = 0 \qquad (5.42) \\
\Leftrightarrow \quad & (x_1 - x_2) \in \{x \mid ({}^{D}_{\mathrm{II}})x = 0\} \\
\Leftrightarrow \quad & (x_1 - x_2) \in \operatorname{Kern}({}^{D}_{\mathrm{II}}).
\end{aligned}
$$

Zu einer Lösung x sind also alle Lösungen $x + y$, $y \in \operatorname{Kern}({}^{D}_{\mathrm{II}})$ beobachtungsäquivalent. Die Dimensionsformel der linearen Algebra sagt folgendes über den Kern einer linearen Abbildung bzw. Matrix:

$$n = \dim(\operatorname{Kern}(A)) + \operatorname{rang}(A). \qquad (5.43)$$

n ist dabei die Spaltenzahl der Matrix. Im betrachteten Fall ergibt sich daraus:

$$
\begin{aligned}
& J \cdot T = \dim(\operatorname{Kern}({}^{D}_{\mathrm{II}})) + \operatorname{rang}({}^{D}_{\mathrm{II}}) \\
\Leftrightarrow \quad & \dim(\operatorname{Kern}({}^{D}_{\mathrm{II}})) = J \cdot T - \operatorname{rang}({}^{D}_{\mathrm{II}}). \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

Der Rang von $({}^{D}_{\mathrm{II}})$ ist höchstens die Zeilenzahl von $({}^{D}_{\mathrm{II}})$:

$$\operatorname{rang}({}^{D}_{\mathrm{II}}) \leq (L+1) \cdot T.$$

Daraus ergibt sich folgende Abschätzung für dim (Kern $({}^{D}_{\mathrm{II}})$) :

$$\dim(\operatorname{Kern}({}^{D}_{\mathrm{II}})) \geq J \cdot T - (L+1) \cdot T = (J - L - 1) \cdot T. \qquad (5.45)$$

Aussicht auf eine eindeutige Lösung von (5.41) besteht also nur dann, wenn die Anzahl J der Sparerschichten höchstens $L + 1$ beträgt. L hat hier den Wert 5, denn die aus der Sparphase ausscheidenden Vertragssummen sind linear abhängig vom nichtzugeteilten Vertragssummenbestand und dem Neugeschäft und wurden deswegen nicht in das System (5.41) einbezogen. Das heißt, daß höchstens 6 Sparerschichten in das Bestandsanpassungsmodell einbezogen werden dürfen, wenn

(5.41) eindeutig lösbar sein soll. Für eine realistische Kollektivanpassung ist diese Zahl von Sparerschichten jedoch zu gering.

Die Menge derjenigen Lösungen des Gleichungssystems (5.41), die als Kollektivzusammensetzungen in Frage kommen, unterliegt weiteren Beschränkungen. Dies sind die Restriktionen (5.10) - (5.13), also die oberen und unteren Schranken, sowie die Schwankungsbeschränkungen für die Neugeschäftsanteile der Sparerschichten. Zumindest enthalten diese Restriktionen die Nichtnegativitätsbedingungen für alle Anteile. Damit wird im allgemeinen bereits ein großer Teil der Lösungsmenge von (5.41) ausgeschlossen. An dieser Stelle wird auch der Wert zusätzlicher Informationen über das Kollektiv deutlich. Der Lösungsraum der möglichen Kollektivzusammensetzungen wird durch relativ enge Grenzen für die einzelnen Neugeschäftsanteile wesentlich stärker beschränkt als durch die trivialen Schranken $0 \leq NVS_t^j \leq NVS_t$. Insofern kommt einer möglichst detaillierten Analyse des realen Bausparkollektivs vor der Anpassung wesentliche Bedeutung zu.

Die Verwertung von Ungleichungsrestriktionen zur Identifikation ist im allgemeinen nicht leicht[1]. Auch im bauspartechnischen Spezialfall (5.41) läßt sich die Frage nach der Identifizierbarkeit aus diesem Grund kaum theoretisch beantworten. Für eine konkrete Realisierung z der Zielgrößen ist diese Frage teilweise jedoch numerisch beantwortbar. Dazu versucht man das lineare System (5.41) unter den Nebenbedingungen (5.10) - (5.13) mit Methoden der linearen Programmierung nach x zu lösen.

Als Ergebnis dieses Versuchs erhält man eine von drei möglichen Antworten:

a) es gibt keine Lösung von (5.41) unter (5.10) – (5.13)

b) es gibt genau eine Lösung von (5.41) unter (5.10) – (5.13)

c) es gibt mehrere Lösungen von (5.41) unter (5.10) – (5.13).

Bei Fall c) ist es klar, daß die wahre Kollektivzusammensetzung nicht identifizierbar ist. Tritt Fall a) auf, so ist daraus der Schluß zu ziehen, daß die Modellspezifikation nicht der Realität entspricht. D. h., es stellt sich nachträglich heraus, daß die unterstellte Voraussetzung der vollständigen Abdeckung der Realität im Modell nicht gegeben ist. Im Fall b) ist der Schluß auf die Identifizierbarkeit der wahren

[1] vgl. Schönfeld, P., Methoden ..., a.a.O., Bd. II, S. 205.

Kollektivzusammensetzung nur dann zulässig, wenn die erwähnte Voraussetzung gewährleistet ist. Da diese Voraussetzung praktisch nicht verifiziert werden kann, ist es mit dem obigen Ansatz nicht möglich, die Identifizierbarkeit nachzuweisen. Lediglich im Fall c) kann die Nicht-Identifizierbarkeit nachgewiesen werden.

Die Annahme der vollständigen Abdeckung der Realität im Modell ist im allgemeinen nicht richtig, da in der Bausparpraxis eine kaum überblickbare Anzahl von Anspar- und Tilgungsverhalten zu beobachten ist. Aus den vorhergehenden Überlegungen über die Identifizierbarkeit der Kollektivzusammensetzung folgt damit, daß die Frage nach der Identifizierbarkeit und damit die Frage nach der Verläßlichkeit der gefundenen Lösungen im positiven Sinne immer offen bleibt. Lediglich im negativen Sinn kann es zuweilen eine Antwort geben, nämlich daß die wahre Kollektivzusammensetzung nicht identifizierbar ist.

Als Fazit dieses Abschnitts muß hier noch einmal deutlich darauf hingewiesen werden, daß eine Lösung des mathematischen Optimierungsproblems nicht als die (eindeutige) wahre Kollektivzusammensetzung angesehen werden kann, selbst wenn alle Zielgrößen z_t^l in allen Jahren exakt angepaßt sind.

5.2.4.2 Die Prognosequalität des Bestandsanpassungsmodells

In Abschnitt 5.1 wurde die Motivation für eine Bestandsanpassung gegeben. Aus diesen Ausführungen wurde deutlich, daß eine hohe Prognosequalität solcher Modelle das eigentliche Ziel der Bestandsanpassung ist. Es sollen gerade die Wirkungen des Altbestandes auf die zukünftige Entwicklung des Bausparkollektivs erfaßt werden.

Im vorhergehenden Abschnitt 5.2.4.1 wurde deutlich, daß das willkommene Nebenprodukt der Bestandsanpassung, nämlich die Kollektivzusammensetzung, unter Umständen nicht sehr verläßlich ist. Über den Grad der Verläßlichkeit sind zudem kaum Aussagen möglich. Wenn man nicht davon ausgehen kann, daß das Bestandsanpassungsmodell die wahre Kollektivzusammensetzung wiedergibt, so kann man natürlich auch nicht ohne weiteres darauf vertrauen, daß mit dem "falschen" Kollektiv die Zukunftswirkungen des wahren Kollektivs richtig erfaßt werden. Es ist also notwendig, die Prognosequalität eines Bestandsanpassungsmodells zu überprüfen. Eine Überprüfung des aktuellen Modells ist nicht möglich, da seine Prognosen nicht mit irgendwelchen realisierten Daten

verglichen werden können.

Aus diesem Grund wird hier ein Verfahren zur Prüfung der Prognosequalität ökonometrischer Modelle angewandt. Es handelt sich dabei um ex-ante Prognosen vom Standpunkt der Vergangenheit aus, im Gegensatz zu ex-post Prognosen, die eigentlich nur die Qualität der Schätzungen dokumentieren. Führt man dieses Verfahren für mehrere Jahre durch und erhält in allen diesen Tests Prognosen, die befriedigend genau mit den tatsächlichen Werten der prognostizierten Jahre übereinstimmen, so spricht das dafür, daß die Wirkungsstruktur der Altbestände durch die Bestandsanpassungsmodelle für mehrere Jahre gut abgebildet wurde. Dann kann man die berechtigte Hoffnung haben, daß auch die Bestandsanpassung für den gegenwärtigen Zeitpunkt eine entsprechend gute Prognosequalität aufweist. Diese kann allerdings erst dann überprüft werden, wenn die realisierten Daten der prognostizierten Jahre feststehen.

5.2.5 Anwendungstests für die optimierte Bestandsanpassung

In diesem Abschnitt werden die entwickelten mathematischen Verfahren zur optimierten Bestandsanpassung an konstruierten Kollektiven systematisch überprüft. An realen Anwendungsbeispielen können die entwickelten Anpassungsverfahren nur begrenzt auf ihre Funktionsfähigkeit überprüft werden, da die realen Kollektivzusammensetzungen nicht bekannt sind. Tests an realen Beständen können sich deswegen immer nur auf die Güte der erreichten Anpassung und die Prognosequalität beziehen, die anhand von ex-ante Prognosen vom Standpunkt der Vergangenheit beurteilt wird.

Zur Überprüfung, unter welchen Umständen und inwieweit die Verfahren die wahre Kollektivzusammensetzung finden, bietet sich folgende Vorgehensweise an. Man gibt eine bestimmte Kolletivzusammensetzung vor und simuliert diese zunächst mit dem Simulationsmodell durch. Anschließend wendet man die Bestandsanpassungsverfahren auf die durch die Simulation berechneten Daten an. Dabei werden gerade die Sparerschichten in die Anpassung einbezogen, die in der Simulation verwendet wurden.

Bei diesem Vorgehen ist die Optimallösung von vornherein bekannt. Es ist ein Zielfunktionswert von Null erreichbar, und zwar mit der Kollektivzusammensetzung, die für die Simulation vorgegeben wurde. Es läßt sich hier also feststellen, ob die Anpassungsverfahren die mögliche vollständige Anpassung erreichen (Zielfunktionswert 0), oder wie weit sie andernfalls davon entfernt bleiben. Falls die vollständige Anpassung erreicht wird, so ist es weiterhin interessant zu beobachten, ob dabei die wahre Kollektivzusammensetzung gefunden wird, oder ob der Zielfunktionswert 0 auch bei anderen Kollektivzusammensetzungen erreicht wird.

Im folgenden wird ein Testprogramm durchgeführt, das die Anpassungsverfahren mit Problemen wachsenden Schwierigkeitsgrades konfrontiert. Der formale Lösungsansatz und seine vereinfachte, linearisierte Version (vgl. Abschnitt 5.2.3.1) wird nicht in die Tests einbezogen, da er zu wenig Erfolg verspricht. Es werden die beiden Varianten des in 5.2.3.2 vorgestellten Koordinatenabstiegsverfahrens getestet, die sich lediglich in der Technik des Ausgleichs von Änderungen der Abstiegskoordinate unterscheiden.

Der Schwierigkeitsgrad der Testbeispiele wird zum einen dadurch sukzessiv erhöht, daß die Anzahl J der Sparerschichten und der Zeithorizont $T = (te - ta + 1)$ der Anpassung vergrößert werden. Zum anderen werden die Rahmenbedingungen kompliziert, beginnend bei Fällen mit konstanter Zielbewertungszahl, konstantem Neugeschäft und über die Jahre konstanter Kollektivzusammensetzung, bis zu Fällen, wo alle diese Größen realistischen bzw. zufälligen Schwankungen unterliegen.

Dabei werden dann auch die Effekte verschiedener Nebenbedingungen getestet, beginnend bei den trivialen Schranken $0 \leq NVS_t^j \leq NVS_t$ und Schwankungsbeschränkungen $\varepsilon_t^j = 1$, bis zu relativ engen Begrenzungen. An einzelnen Fällen wird auch getestet, wie die Verfahren reagieren, wenn die Schranken oder Schwankungsbeschränkungen die wahre Kollektivzusammensetzung ausschließen. Solche Situationen sind durchaus von praktischem Interesse, da Analysen realer Bausparkollektive wegen der hohen Anzahl von Verträgen fast immer nur Stichprobencharakter haben können. Die "wahre" Kollektivzusammensetzung kann unter Umständen durch solche Analysen selbst bei vorsichtiger Interpretation aus der Menge der zulässigen Lösungen ausgeschlossen werden.

Als erster Test (Fall 1) wurde ein Kollektiv über einen Zeitraum von vier Jahren simuliert, das lediglich aus Regelsparern und 40%-Soforteinzahlern im Hochzins-Standardtarif (3%/5%) besteht. In diesen vier Jahren wurden diese beiden Schichten in einem konstanten Mischungsverhältnis von 20% Regelsparern und 80% Soforteinzahlern gestartet. Zur Anpassung wurden die Zeitreihen *BSE,BDZ,VSNZ,VSZ*, und *SPE* auch nur in dem Simulationszeitraum von 4 Jahren benutzt. Die Bestandsanpassung wurde mit beiden Ausgleichstechniken durchgeführt. Beide Verfahren fanden die tatsächliche Kollektivzusammensetzung exakt heraus. Die Methode des proportionalen Ausgleichs benötigte dazu 5 Koordinatenzyklen mit insgesamt 40 einzelnen Line-Search Durchgängen, in denen 670 Kollektivzusammensetzungen ausgewertet wurden. Die dafür benötigte Rechenzeit betrug auf einer IBM 4361 0.01 min. CPU-Zeit. Die Methode des gleichmäßigen Ausgleichs benötigte zum Herausfinden der tatsächlichen Kollektivzusammenseztung 5 Koordinatenzyklen mit 38 Line-Search Aufrufen und 686 ausgewerteten Punkten in 0.01 min. CPU-Zeit.

Als Fall 1A wurde das gleiche konstante Kollektiv über einen längeren Zeitraum von 9 Jahren simuliert. Mit beiden Ausgleichsverfahren der Bestandsanpassung konnte die wahre Kollektivzusammensetzung bestimmt werden. Die dazu benötigten Schrittzahlen und Zeiten finden sich in der Tabelle 5.IX. Daraus wird deutlich, daß auch in diesem Fall kaum ein Unterschied im Rechenaufwand und der CPU-Zeit zwischen beiden Ausgleichsverfahren besteht.

In Fall 1 wurde ein Kollektiv betrachtet, das aus zwei Sparerschichten besteht, die sich in ihrem Sparverhalten stark unterscheiden. Die Entwicklung des Bausparguthabens und der Spargeldeingang sind bei diesen beiden Schichten so stark unterschiedlich, daß bereits eine geringe Abweichung von der tatsächlichen Kollektivzusammensetzung relativ große Abweichungen in den Zeitreihen *BSE* und *SPE* induziert. Daher reagiert die Zielfunktion sehr sensibel auf solche Abweichungen im Kollektiv. Dadurch ist die in der Bestandsanpassung zu lösende Aufgabe nicht sehr schwer.

Um die Fähigkeit der Verfahren zur Diskriminierung nicht so stark verschiedener Sparerschichten zu testen, wurde in Fall 2 die gleiche Situation wie in Fall 1, jedoch mit ähnlicheren Sparerschichten untersucht. Statt des 40%-Soforteinzahlers wurde ein Überregelsparer mit einer Sparrate von 0,6% monatlich (statt 0,4% beim Regelsparer) in das Kollektiv aufgenommen. Damit

weisen die beiden einbezogenen Schichten eine prinzipiell ähnliche Entwicklung des Bausparguthabens und des Spargeldeingangs auf, wenn auch die Höhe der Raten deutlich verschieden sind. Der Regelsparer hat einen Anteil von konstant 40% am Neugeschäft, der Überregelsparer 60% .

Das Bestandsanpassungsverfahren mit der Methode des proportionalen Ausgleichs erreichte die wahre Kollektivzusammensetzung nicht exakt. Nach 26 Koordinatenzyklen mit 208 Line-Search Aufrufen in 0.06 min. CPU-Zeit brach das Verfahren die Suche ab, da die Zielfunktion im letzten Zyklus nicht mehr verbessert werden konnte. Die gefundene Kollektivzusammensetzung und die Abweichungen von der wahren Zusammensetzung waren dabei die folgende:

Jahr	SP1-REG		SP1-MREG	
1	39.9	-0.1	60.1	0.1
2	40.4	0.4	59.6	-0.4
3	39.3	-0.7	60.7	0.7
4	40.5	0.5	59.5	-0.5

Tabelle 5.V

Das angepaßte Kollektiv weicht also nicht sehr stark vom wirklichen ab. Der Zielfunktionswert beträgt 0.0001 und die Anpassung der kollektiven Zeitreihen ist fast vollständig. Lediglich in wenigen Zahlen gibt es überhaupt Abweichungen von den simulierten Beständen und diese Abweichungen liegen lediglich im Bereich von 0,01%. Mit der Methode des gleichmäßigen Ausgleichs ergab sich das gleiche Kollektiv bei etwas erhöhtem Rechenaufwand (28 Koordinatenzyklen in 0.06 min. CPU-Zeit).

In Fall 3 wurde getestet, ob die Abweichungen des angepaßten Kollektivs vom tatsächlichen durch eine größere Zahl anzupassender Daten in Form eines erweiterten Zeithorizonts von 9 Jahren geringer werden. Dabei tauchen durch die implizit ebenfalls erhöhte Zahl der Variablen natürlich auch zusätzliche numerische Schwierigkeiten auf und es ergibt sich eine größere kombinatorische Vielfalt der möglichen Kollektivzusammensetzungen. Bei deutlich erhöhtem Rechenaufwand (144 Koordinatenzyklen in 1.3 CPU-Minuten bei beiden Verfahren) weicht das angepaßte Kollektiv deutlicher vom wahren ab als in Fall 2:

Jahr	SP1-REG		SP1-MREG	
1	40.0	-0.0	60.0	0.0
2	40.0	-0.0	60.0	0.0
3	40.0	0.0	60.0	-0.0
4	37.8	-2.2	62.2	2.2
5	45.0	5.0	55.0	-5.0
6	35.3	-4.7	64.7	4.7
7	43.3	3.3	56.7	-3.3
8	37.8	-2.2	62.2	2.2
9	41.3	1.3	58.7	-1.3

Tabelle 5.VI

Die Zielfunktion ist mit 0.002 wiederum sehr gering und die Anpassung fast vollständig. Bei den hier bereits deutlicheren Abweichungen vom wahren Kollektiv (mittlere absolute Abweichung der Prozentanteile von 2.1 bzw. 2.3) muß man einräumen, eine qualitativ von der wahren Kollektivzusammensetzung verschiedene Lösung des mathematischen Anpassungsproblems gefunden zu haben. Während bei den geringeren Abweichungen in Fall 2 noch von Ungenauigkeiten gesprochen werden kann, liegt hier eher der Fall nicht eindeutiger Lösungen des mathematischen Problems vor (vgl. Abschnitt 5.2.4.1).

An den Abweichungen von der wahren Kollektivzusammensetzung fällt auf, daß das Verfahren die wahre Kollektivzusammensetzung in den ersten drei Jahren gefunden hat. Der Grund dafür liegt darin, daß die Überregelsparer dieser ersten drei Jahrgänge im betrachteten Zeitraum von 9 Jahren bereits zugeteilt werden. Daher erscheinen sie in den letzten Jahren der Anpassung in den Zeitreihen *BDZ* und *VSZ* des Darlehensbereiches. Dadurch ergeben sich für das Bestandsanpassungsmodell zusätzliche Unterscheidungskriterien gegenüber dem Regelsparer, mit deren Hilfe die wahren Anteile gefunden wurden. Es fällt weiterhin auf, daß die absoluten Abweichungen inmitten des Anpassungszeitraumes ohne die ersten drei Jahre, die genau getroffen wurden, wesentlich stärker sind als zu Beginn und am Ende. Eine Erklärung dafür ist sicherlich, daß die konkrete Aufteilung der kollektiven Bestände auf die geringere Anzahl von Sparern zu Beginn der Rechnung einfacher ist, als bei der immer weiter steigenden Zahl in späteren Jahren.

In Fall 4 wurde geprüft, ob das Auffinden einer variierenden Kollektivzusammensetzung zusätzliche Schwierigkeiten gegenüber einer über die

Jahre konstanten Zusammensetzung macht. Dazu wurden die Anteile der beiden Schichten aus Fall 3 am Neugeschäft folgendermaßen abgeändert:

Jahr	SP1-REG	SP1-MREG
1	10.0	90.0
2	20.0	80.0
3	30.0	70.0
4	40.0	60.0
5	50.0	50.0
6	60.0	40.0
7	70.0	30.0
8	80.0	20.0
9	90.0	10.0

Tabelle 5.VII

Das Bestandsanpassungsverfahren mit proportionalem Ausgleich brauchte zur Bearbeitung dieses Falles 4 erheblich länger als für den Fall 3, nämlich 213 (193) Koordinatenzyklen mit 3834 (3461) Line-Search Aufrufen in 2.0 (1.8) min. CPU-Zeit. Der Zielfunktionswert ist mit 0.003 (0.004) ebenfalls schlechter als in 3 und die Anpassung ist dementsprechend geringfügig ungenauer. Dennoch liegen die Abweichungen der Zeitreihen in den einzelnen Jahren von den simulierten Beständen immer noch im Bereich von nur etwa 0.05% . Die gefundene Lösung sieht folgendermaßen aus:

Jahr	SP1-REG		SP1-MREG	
1	10.0	-0.0	90.0	-0.0
2	20.0	-0.0	80.0	0.0
3	30.0	0.0	70.0	-0.0
4	37.2	-2.8	62.8	2.8
5	56.8	6.8	43.2	-6.8
6	53.2	-6.8	46.8	6.8
7	74.7	4.7	25.3	-4.7
8	76.9	-3.1	23.1	3.1
9	92.0	2.0	8.0	-2.0

Tabelle 5.VIII

Wiederum ist die wahre Zusammensetzung in den ersten 3 Jahren getroffen und die Abweichungen sind in der Mitte des Anpassungszeitraums stärker als am Anfang und am Ende. Trotz des größeren Rechenaufwandes sind die Abweichungen von der wahren Zusammensetzung höher als bei der jährlich konstanten Zusammensetzung des Falles 3, denn die mittlere absolute Abweichung der geschätzten Prozentanteile beträgt 2.9 (3.5).

Fall 5 unterstellt wieder die konstante Neugeschäftszusammensetzung aus 40% Regelsparern und 60% Überregelsparern, nun jedoch über einen Zeitraum von 20 Jahren. Die Ergebnisse bestätigen die Hypothese, die aus den Fällen 3 und 4 gezogen wurde, denn bis auf die letzten 6 Jahre wurde die wahre Kollektivzusammensetzung mit geringen Abweichungen gefunden. Wie in den Fällen 3 und 4 gibt es nur für die letzten 6 Startjahrgänge größere Differenzen, die im Anpassungszeitraum noch nicht zugeteilt werden. Wegen des längeren Zeitraums sind die mittleren Abweichungen der Anteile mit 2.0 (2.2) deswegen niedriger als im Fall 4. Die notwendige Rechenzeit nimmt hier mit 11.4 (10.2) CPU-Minuten bereits erhebliche Dimensionen an.

Fall 6 unterscheidet sich von Fall 5 durch eine jährlich variierende Zusammensetzung des Neugeschäfts aus Regelsparern und Überregelsparern. Das Resultat in bezug auf den Zielfunktionswert, die Anpassungsgüte und die Abweichungen des geschätzten vom vorgegebenen Kollektiv ist das gleiche wie in Fall 5. Die Anzahl der notwendigen Koordinatenzyklen und die Rechenzeit haben sich jedoch mehr als verdoppelt.

In Fall 7 wird wie in 3 wieder von einem Zeitraum von 9 Jahren und einer konstanten Neugeschäftszusammensetzung von 40% Regelsparern und 60% Überregelsparern ausgegangen. Das Neugeschäftsvolumen wird jedoch einem ungleichmäßigen Wachstum unterworfen. Die Anzahl der Koordinatenzyklen und die benötigte Rechenzeit sind fast die gleichen wie in Fall 3. Zielfunktion, Anpassung der Zeitreihen und die Abweichung vom realen Kollektiv sind jedoch wesentlich schlechter als in 3. So beträgt die mittlere Abweichung der Prozentanteile hier 5.0 (4.9) gegenüber 2.1 (2.3) in Fall 3. Diese Verschlechterung erstaunt, da man a priori eine Verbesserung erwarten würde, denn durch die unterschiedlichen Neugeschäftsniveaus gibt es gegenüber dem konstanten Neugeschäft zusätzliche Unterscheidungsmerkmale zwischen den einzelnen Abschlußjahrgängen.

In Fall 8 wurde gegenüber 3 statt des Neugeschäfts die Zielbewertungszahl von Jahr zu Jahr variiert. Auch hier würde man durch diese zusätzlichen

Unterscheidungsmerkmale der Jahrgänge eine Verbesserung gegenüber 3 erwarten. Tatsächlich steigt jedoch die notwendige Rechenzeit auf 2.0 (2.0) Minuten und die Zahl der Koordinatenzyklen auf 215 (221) an. Dennoch sind die Zielfunktion mit 0.003 und die mittlere Abweichung vom wahren Kollektiv mit 2.8 (2.6) schlechter als in Fall 3.

Fall 9, in dem die Neugeschäftentwicklung und die Zielbewertungszahl gegenüber 3 jährlich variierren, bestätigt den unerwarteten Trend, der in den Fällen 7 und 8 zum Ausdruck kam. Zusätzliche Information zur Unterscheidung einzelner Jahrgänge in Form von nicht konstantem Neugeschäft und nicht konstanter Zielbewertungszahl erschweren den Optimierungsprozeß , statt ihn zu erleichtern. Der Zielfunktionswert und die Abweichungen vom wahren Kollektiv sind deutlich schlechter als in Fall 3.

Fall 10 geht der Fragestellung nach, ob mit den Verfahren zur Bestandsanpassung auch Kollektive identifiziert werden können, die sich bereits im Beharrungszustand befinden. Dazu wird die konstante Neugeschäftzusammensetzung von 40% Regelsparern und 60% Überregelsparern über einen Zeitraum von 34 Jahren simuliert. Das Resultat ist ähnlich wie in den anderen Fällen. Bis auf die letzten 6 noch nicht zugeteilten Jahrgänge wurde die wahre Kollektivzusammensetzung gefunden. Die mittlere Abweichung vom wahren Kollektiv ist daher mit 0.97 (0.97) sehr gering und die Anpassung der Zeitreihen ist fast vollständig. Wegen der konstanten Zusammensetzung des Neugeschäfts ist der Rechenaufwand mit 164 (169) Koordinatenzyklen und 19.6 (20.0) CPU Minuten für die Größe des Problems moderat.

In den Fällen 11–14 werden Kollektive untersucht, die aus jeweils fünf Sparerschichten bestehen. Es handelt sich dabei um einen Regelsparer (Rate 0,4%), einen Ratensparer mit monatlicher Rate 1% , einen 40% –Sofortteinzahler, einen Kündiger und einen Abbrecher (Kündigung bei Erreichen eines Anspargrades von 2%). In Fall 11 wurden diese Schichten über vier Jahre in einer konstanten Zusammensetzung unterstellt. Bis auf die Zahl der Schichten ist dieser Fall also mit Fall 2 vergleichbar. Bei 8 (14) Koordinatenzyklen mit 160 (277) Line–Search Aufrufen wurde etwa die gleiche Rechenzeit benötigt wie im Fall 2. Der Zielfunktionswert ist hier ebenfalls beinahe Null und die Anpassung der Zeitreihen ist fast vollständig. Die mittlere absolute Abweichung der Prozentanteile ist mit 7.5 (9.6) gegenüber 0.42 in Fall 2 jedoch ziemlich hoch. Lediglich der Anteil des

Abbrechers wurde in den ersten drei Jahren getroffen. Dies ist damit zu erklären, daß der Abbrecher nach etwa einem Jahr das Kollektiv wieder verläßt. Somit entspricht diese Beobachtung dem bereits bekannten Effekt, daß die Anteile von Schichten, die die Sparphase bereits verlassen haben, besser getroffen werden.

Fall 12 untersucht das gleiche konstante Kollektiv über einen Zeitraum von 15 Jahren. Das Ergebnis deckt sich weitgehend mit den Beobachtungen am zweischichtigen Kollektiv. Es wurde eine fast vollständige Anpassung der Zeitreihen erreicht (Zielfunktionswert 0.06 bzw. 0.13). Die Anteile der Schichten sind in den ersten sieben Jahren mit geringen Abweichungen getroffen. Erst bei den Jahrgängen, die im Anpassungszeitraum nicht mehr zugeteilt werden, treten größere Differenzen auf, die zu einer mittleren Abweichung von 4.3 (5.5) führen. Die Rechenzeit liegt hier mit 75.8 (78.1) CPU-Minuten recht hoch. Fall 13 unterscheidet sich von 12 dadurch, daß die Anteile der fünf Schichten nicht über die Zeit konstant sind, sondern zufällig variieren. Die Bearbeitung dieses Falles benötigte weniger Koordinatenzyklen und dementsprechend kürzere Rechenzeiten, dafür liegt die mittlere Abweichung der Prozentanteile vom wahren Kollektiv mit 7.6 (7.8) höher als in Fall 12. Auch Fall 14, bei dem die Kollektivzusammensetzung über 25 Jahre zufällig variierte, brachte keine neuen Erkenntnisse. Bei einer mittleren Abweichung von 5.2 sind wiederum die Anteile der bereits zugeteilten Schichten gut getroffen. Die Rechenzeit für 1457 Koordinatenzyklen betrug hier 303.8 Minuten CPU-Zeit.

In Fall 15 wird das gleiche Kollektiv wie in Fall 3 (über 9 Jahre konstante Zusammensetzung aus zwei Schichten) unter den gleichen Bedingungen betrachtet. Zusätzlich werden für die Anteile der beiden Schichten in allen Jahren obere und untere Schranken vorgegeben, die die wahre Lösung auf $\pm 20\%$ eingrenzen. Die Ergebnisse sind fast die gleichen wie in Fall 3, sie werden jedoch in deutlich kürzerer Zeit erzielt. Die Anzahl der nötigen Koordinatenzyklen beträgt 61 (85) gegenüber 144 (144) ohne die Schranken. In Fall 16 wird der Einfluß der gleichen Beschränkungen ($\pm$ 20%) für den Fall 4 (variierende Kollektivzusammensetzung) getestet. Hier ist nicht nur die Zahl der Koordinatenzyklen mit 153 (102) gegenüber 213 (193) deutlich reduziert, sondern auch die mittleren Abweichungen vom realen Kollektiv sind mit 1.9 (2.4) gegenüber 2.9 (3.5) geringer. Fall 17 bringt bei einer weiteren Einengung der Schranken auf $\pm 10\%$ gegenüber Fall 16 nochmals eine Reduzierung des Rechenaufwandes auf 71 (70) Koordinatenzyklen bei noch besserer Anpassung und geringeren Abweichungen vom tatsächlichen Kollektiv. Bei

Schranken von ±3% (Fall 18) sind bei weiter verbesserten Ergebnissen nur noch 23 (17) Koordinatenzyklen nötig. In Fall 19 sind die Schranken unsymmetrisch und mit verschiedener Streubreite um die wahren Anteile plaziert. In 79 (27) Koordinatenzyklen wurde das wahre Kollektiv bei mittleren Abweichungen von 0.6 (1.1) gut angenähert.

Die Fälle 15–19 zeigen deutlich, daß Schranken für die Schichtenanteile die Rechenzeit erheblich abkürzen können. Noch wichtiger ist jedoch, daß dadurch eine bessere Annäherung der wahren Kollektive gelingt. Je enger die Anteile eingegrenzt werden können, umso größer sind die Vorteile in bezug auf Rechenzeit und Genauigkeit. Je enger solche Grenzen gezogen werden, umso größer ist jedoch auch die Gefahr, daß die wahren Schichtenanteile durch die Schranken ausgeschlossen werden. Aus diesem Grund wird in den Fällen 20–24 untersucht, wie das Anpassungsverfahren darauf reagiert.

In Fall 20 wurden die oberen Schranken einer Schicht und die unteren Schranken der anderen Schicht abwechselnd so gesetzt, daß die wahren Anteile (wie in Fall 4) jeweils um 1% unter- bzw. überschritten werden müssen. Bis auf ein Jahr werden im angepaßten Kollektiv diese Schranken angenommen, sodaß die mittlere Abweichung vom wahren Kollektiv mit 2.4 (2.4) noch annehmbar erscheint. Der Zielfunktionswert ist hier nach 40 (41) Koordinatenzyklen mit 1.7 (1.7) deutlich von Null verschieden, die Anpassung der Zeitreihen ist also nicht mehr fast vollständig wie in den Fällen 1–19. In den Fällen 21, 22 und 23 wurden die Schranken so gesetzt, daß die wahren Anteile um mindestens 5% , 10% bzw. 20% verfehlt werden müssen. Die Resultat dieser Fälle sind ähnlich wie in Fall 20: die Schranken werden jeweils bis auf zwei Jahre angenommen, so daß die Abweichungen von der wahren Kollektivzusammensetzung so gering wie möglich sind. Die Zielfunktionswerte sind jedoch sehr schlecht: 42.4 in Fall 21, 176 in Fall 22 und 950.8 in Fall 23. Für die Bearbeitung dieser Fälle waren nur zwischen 2 und 8 Koordinatenzyklen erforderlich.

Das Verhalten des Bestandsanpassungsverfahrens in den Fällen 20–23 ist insofern gut, als es den Ausschluß der wahren Kollektivzusammensetzung durch hohe Zielfunktionswerte und teilweise extrem schlechte Anpassungen der Zeitreihen nach kurzer Rechenzeit signalisiert. Dies muß jedoch nicht immer so sein. Bei mehreren Schichten im Kollektiv kann u.U. eine "bessere" Anpassung durch falsche Zusammensetzungen erreicht werden. Die Fehlspezifikation der Schranken wird

dann nicht so offensichtlich.

In den Fällen 24 und 25 wurde unterstellt, daß sich die Kollektivzusammensetzung im fünften von neun Jahren schlagartig von 10% Regelsparern und 90% Überregelsparern auf das umgekehrte Verhältnis 90:10 ändert. In Fall 24 werden jedoch nur jedes Jahr Änderungen von 10% erlaubt. In Fall 25 betragen diese Schwankungsbeschränkungen jährlich 40% . Fall 24 führt zu sehr schlechten Ergebnissen mit Zielfunktionswerten um 9830 und mittleren Abweichungen von 38.9. In Fall 25 wird das wahre Kollektiv hingegen bis auf vier Jahre getroffen (mittlere Abweichung 5.4 (5.4)) und die Zeitreihen sind fast vollständig angepaßt (Zielfunktionswert 0.09). Die Fehlspezifikation der Schwankungsbeschränkungen könnte hier also nicht diagnostiziert werden.

Als Fazit der Testfälle 1–25 kann folgendes festgehalten werden:

- Die Anteile von Sparerschichten, die bereits zugeteilt wurden, werden mit beiden Ausgleichsverfahren zuverlässig erkannt.
- Die Anteile von Schichten, die sich noch in der Sparphase befinden, sind oft mit systematisch schwankenden Fehlern behaftet. Diese können umso größer sein, je ähnlicher das Sparverhalten der verschiedenen Schichten ist.
- Zuverlässige Schranken für Schichtenanteile bringen erhebliche Vorteile in bezug auf die Rechenzeit und die Annährung des wahren Kollektivs.
- Falsche Schranken führen nicht immer zu eklatant schlechten Anpassungen, die die Fehlspezifikation erkennen lassen. Daher sollten Schranken eher zu weit als zu eng gesetzt werden.
- Zwischen den beiden Varianten des Ausgleichsverfahrens lassen sich keine signifikanten oder systematischen Unterschiede feststellen. Daher empfiehlt es sich, in der Praxis eine Kombination von beiden zu benutzen, die die Strategien des proportionalen und gleichmäßigen Ausgleichs abwechselnd zur Anwendung bringt.

Fall	Sparer	Jahre	Durch-laeufe	Line-Search	Punkte	CPU-Zeit	Zielfunk-tionswert	mittlere Abweichung
2	2	4	28	222	3116	0.1	0.00010	0.4
2	2	4	26	208	2936	0.1	0.00010	0.4
3	2	9	144	2587	42076	1.3	0.00195	2.3
3	2	9	144	2592	42396	1.3	0.00189	2.1
4	2	9	193	3461	56381	1.8	0.00430	3.5
4	2	9	213	3834	62303	2.0	0.00292	2.9
5	2	20	224	8948	173943	10.2	0.01415	2.2
5	2	20	251	10040	194714	11.4	0.01032	2.0
6	2	20	477	19067	381409	22.4	0.02129	1.6
6	2	20	528	21120	419378	24.5	0.01312	1.3
7	2	9	150	2692	45520	1.4	0.01367	4.9
7	2	9	144	2592	43976	1.4	0.01440	5.0
8	2	9	221	3972	64880	2.1	0.00226	2.6
8	2	9	215	3870	63227	2.0	0.00270	2.8
9	2	9	192	3449	57847	1.8	0.00639	3.4
9	2	9	138	2484	41915	1.3	0.01549	5.1
10	2	34	169	11474	233448	20.1	0.03221	1.0
10	2	34	164	11152	227230	19.7	0.03344	1.0
11	5	4	14	277	4630	0.1	0.00022	9.6
11	5	4	8	160	2948	0.1	0.00008	7.5
12	5	15	1036	77688	1435230	78.1	0.12638	5.5
12	5	15	911	68325	1424069	75.8	0.05883	4.3
13	5	15	953	71463	1286613	71.2	0.03919	7.8
13	5	15	793	59475	1217023	65.0	0.09987	7.6
14	5	25	1223	152854	3055627	228.0	0.31710	5.5
14	5	25	1457	182125	3952933	303.8	0.36800	5.2
15	2	9	85	1530	21810	0.7	0.00228	1.8
15	2	9	61	1098	15738	0.5	0.00407	2.0
16	2	9	102	1836	26151	0.9	0.00395	2.4
16	2	9	153	2754	38862	1.3	0.00192	1.9
17	2	9	70	1260	16142	0.6	0.00224	1.6
17	2	9	71	1278	16467	0.6	0.00196	1.4
18	2	9	17	306	3139	0.1	0.00068	0.7
18	2	9	23	414	4357	0.2	0.00067	0.7
19	2	9	27	486	5819	0.2	0.00346	1.1
19	2	9	79	1422	17045	0.6	0.00048	0.6
20	2	9	44	792	17201	0.5	1.68397	2.4
20	2	9	40	720	15752	0.5	1.68395	2.4
21	2	9	7	126	3355	0.1	42.44585	11.3
21	2	9	8	144	3722	0.1	42.44684	11.3
22	2	9	2	36	1036	0.0	175.96936	20.0
22	2	9	2	36	1035	0.0	175.97223	20.0
23	2	9	2	36	965	0.0	950.75391	27.8
23	2	9	2	36	988	0.0	950.75757	27.8
24	2	9	4	68	1164	0.0	9829.56641	38.9
24	2	9	4	68	1180	0.0	9829.58203	38.9
25	2	9	53	954	15087	0.5	0.09752	5.4
25	2	9	63	1134	17922	0.6	0.09092	5.4

Tabelle 5.IX: Ergebnisse der Testfälle

Teil 6

Anwendungsbeispiele für die entwickelten Modelle

Formelmodell und Simulationsmodell sind nicht zwangsläufig Alternativen bei der Untersuchung bauspartechnischer Fragestellungen, sie ergänzen sich vielmehr gegenseitig. Zwar lassen sich alle numerischen Untersuchungen mit dem Formelmodell auch mit dem Simulationsmodell durchführen, jedoch meist mit ungleich höherem Rechenaufwand. Aus diesem Grund sind einige der folgenden Beispiele zweigeteilt. Zunächst wird mit dem Formelmodell eine grundsätzliche Analyse durchgeführt. Anschließend werden mit dem Simulationsmodell spezielle Effekte untersucht, für die das Formelmodell ungeeignet ist. Die Beispiele in diesem Teil sind nur einige wenige denkbare Möglichkeiten für die Anwendung des vorgestellten bausparmathematischen Instrumentariums, die seine Einsatzmöglichkeiten exemplarisch demonstrieren sollen.

6.1 Die Wirkungen der Zahlungsgewohnheiten der Bausparer

6.1.1 Wahl des Zahlungszeitpunktes

In diesem Abschnitt wird mit dem Formelmodell untersucht, welche Auswirkungen die Wahl des Zahlungszeitpunktes von Ratensparern und Soforteinzahlern auf die Liquiditäts- und Ertragslage der Bausparkasse hat. Ausgegangen wird hierbei von der im Formel- und im Simulationsmodell unterstellten Guthabens- und Darlehensverzinsung nach dem Quartalsmodell, in dem jeweils die Quartalsanfangsbestände verzinst werden. Bereits in 3.2.1.7 (vgl. Formel (3.100)) wurde darauf hingewiesen, daß die Zinsspanne in der Definition (3.97) bei einem Anlegungsgrad von 100% je nach Zahlungsrhythmus erheblich von der Differenz zwischen Darlehens- und Guthabenszinssatz abweichen kann.

Für verschiedene Ansparverhalten werden jeweils die beiden extremen Situationen der Einzahlung der regelmäßigen Sparraten bzw. der Soforteinzahlung am Quartalsanfang und am Quartalsende gegenübergestellt. Die Wartezeiten bis zur Zuteilung tz^A und tz^E werden hierfür mittels der verallgemeinerten Kassengleichung (3.84) so bestimmt, daß der Anlegungsgrad bei konstantem Neugeschäft 1 beträgt. Dazu muß die kontinuierliche Version des Formelmodells benutzt werden.

Zur Berechnung der Wartezeit bis zum Bewertungsstichtag tz^A werden in der Kassengleichung (3.84) die entsprechenden Werte der beiden Standardtarife, die hier

untersucht werden sollen, substituiert. Die Wachstumsgrößen r_S, r_D und y_S, y_D haben wegen der unterstellten Konstanz des Neugeschäfts den Wert 0 bzw. 1. Hierbei muß jedoch beachtet werden, daß für diesen Fall ($r_S = r_D = 0$) die Gleichung (3.84) wegen der Division durch r_S (also durch Null) zu

$$a = \frac{BDZ}{BSE}$$

reduziert werden muß. Wegen der konstanten Tilgungsbeiträge in Höhe von 0,6% monatlich gilt $TRW_0 = TR = 0.018$ und $w = 1$. Mit $y_D = 1$ und $w = 1$ ist auch $w \cdot y_D = 1$. Daher muß der Term $\frac{(w \cdot y_D)^{tt+1} - 1}{w \cdot y_D - 1}$, der die Summe $\sum_{i=0}^{tt} (w \cdot y_D)^i$ repräsentiert, durch $tt+1$ ersetzt werden. Wegen des stetigen Geldeinganges sind für k auch gebrochene Werte zulässig. R hat deswegen in der kontinuierlichen Version des Formelmodells immer den Wert 0 und daher fallen die Terme weg, in denen R vorkommt. Für den Verschub zwischen Bewertungsstichtag und Auszahlung GR wird der Wert 0 angenommen.

Die Wartezeiten tz^A für verschiedene Sparverhalten werden nun berechnet, indem die Kenngrößen für das jeweilige Sparverhalten ($SR, SOFORT$) festgelegt werden und das entsprechende Kassengleichungssystem mit dem Newton-Verfahren gelöst wird. Das Kassengleichungssystem besteht aus der Kassengleichung (3.84), der Gleichung (3.85) für das Bruttodarlehen und (3.52) für die Bestimmung der Tilgungsdauer. Als Resultat erhält man eine Lösung (tz^A, BDZ_0^A, tt^A).

Die Wartezeit tz^E bei Einzahlungen am Quartalsende wird auf die gleiche, eben beschriebene, Weise berechnet wie tz^A. Die Kassengleichung (3.84) muß lediglich so modifiziert werden, daß das Bruttodarlehen mit zur Kassenleistung zählt und daß der letzte Guthabensstand nicht in die Sparerleistung eingeht. Dies wird dadurch erreicht, daß in der Kassengleichung der Term $-BDZ_0$ wegfällt und tz durch $tz - 1$ ersetzt wird. Durch Lösen des so modifizierten Kassengleichungssystems erhält man die Lösung (tz^E, BDZ_0^E, tt^E).

Die Zinsspannen im Beharrungszustand werden nach den Formeln (3.98) und (3.100) auf der Grundlage der jeweiligen Wartezeiten bis zur Zuteilung berechnet:

$$ZINSPAN^E = d - gb$$

$$ZINSPAN^A = d - gb + \frac{(d-1) \cdot BDZ_0 + (gb-1) \cdot BSE_{tz^A}^S}{BSE^A}.$$

Die entsprechenden Zinsüberschüsse werden dann nach Formel (3.97) berechnet. In den folgenden Tabellen 6.I und 6.II sind die Wartezeiten, Zinsspannen auf

Jahresbasis und Zinsüberschüsse für Ratensparer mit verschiedenen Sparraten für den Hochzins-Standardtarif (Tabelle 6.I) und den Niedrigzins-Standardtarif (Tabelle 6.II) zusammengestellt. Die absoluten Niveaus des Zinsüberschusses beziehen sich dabei jeweils auf ein Neuabschlußvolumen von 100 Einheiten pro Quartal.

	Einzahlungen zum					
	Quartalsanfang			Quartalsende		
SR	tz(A)	ZISP(A)	ZUE(A)	tz(E)	ZISP(E)	ZUE(E)
0.20	60.902	2.371	7.303	61.981	2.033	6.281
0.30	46.260	2.424	6.321	47.198	2.033	5.286
0.40	37.761	2.472	5.663	38.605	2.033	4.617
0.50	32.116	2.516	5.180	32.893	2.033	4.125
0.60	28.056	2.556	4.806	28.781	2.033	3.744
0.70	24.978	2.596	4.505	25.661	2.033	3.437
0.80	22.554	2.633	4.256	23.202	2.033	3.182
0.90	20.589	2.668	4.046	21.207	2.033	2.967
1.00	18.961	2.702	3.865	19.554	2.033	2.783

Tabelle 6.I: Wartezeiten, Zinsspannen und Zinsüberschüsse von Ratensparerkollektiven im Hochzins-Standardtarif

	Einzahlungen zum					
	Quartalsanfang			Quartalsende		
SR	tz(A)	ZISP(A)	ZUE(A)	tz(E)	ZISP(E)	ZUE(E)
0.20	61.651	2.321	7.160	62.801	2.023	6.273
0.30	46.681	2.368	6.176	47.670	2.023	5.274
0.40	38.033	2.409	5.518	38.920	2.023	4.605
0.50	32.308	2.447	5.036	33.119	2.023	4.113
0.60	28.199	2.482	4.663	28.953	2.023	3.732
0.70	25.088	2.516	4.363	25.797	2.023	3.425
0.80	22.641	2.548	4.114	23.312	2.023	3.171
0.90	20.660	2.578	3.905	21.299	2.023	2.957
1.00	19.019	2.608	3.726	19.631	2.023	2.772

Tabelle 6.II: Wartezeiten, Zinsspannen und Zinsüberschüsse von Ratensparerkollektiven im Niedrigzins-Standardtarif

Ein Vergleich der Wartezeiten bis zur Zuteilung zeigt, daß die beiden extremen Annahmen über den Zeitpunkt der Spargeldeingänge für den Ratensparer eine Veränderung der Wartezeit um bis zu 1.15 Quartalen nach sich zieht (Sparrate 0,2%, Niedrigzinstarif). Im Hochzinstarif sind diese Differenzen grundsätzlich etwas niedriger als im Niedrigzinstarif. Die Zinsspanne ist bei Einzahlungen am Quartalsanfang im Hochzinstarif um 0.34 bis 0.67 Prozentpunkte und im Niedrigzinstarif um 0.30 bis 0.59 Prozentpunkte höher als bei Einzahlungen am Quartalsende. Dementsprechend sind auch die Unterschiede des Zinsüberschusses.

Mit zunehmender Sparrate wird auch die Differenz der Zinsspannen immer größer, während die Unterschiede im Zinsüberschuß fast unabhängig von der Sparrate sind. Dies liegt daran, daß sich der Anspargrad bei Zuteilung und das Bruttodarlehen mit der Höhe der Sparrate nur geringfügig ändern, ihre Summe ist sogar bis auf die Darlehensgebühr, deren Höhe vom Bruttodarlehen abhängt, konstant. Somit bleibt der Zähler des Zinsspannenzuschlages aus (3.100), der gerade die Differenz des Zinsüberschusses darstellt, fast unverändert. Der Nenner,

der das Bilanzvolumen der Bausparkasse darstellt, sinkt jedoch erheblich mit steigender Sparrate, da höhere Sparraten kürzere Wartezeiten und somit höhere Umschlagsgeschwindigkeiten des Kollektivs implizieren.

In den folgenden Tabellen 6.III und 6.IV sind die Wartezeiten, Jahreszinsspannen und Zinsüberschüsse für Bausparkollektive zusammengestellt, die ausschließlich aus Soforteinzahlern im Hochzins-Standardtarif (Tabelle 6.III) bzw. im Niedrigzins-Standardtarif (Tabelle 6.IV) bestehen.

	Einzahlungen zum					
	Quartalsanfang			Quartalsende		
SOFORT	tz(A)	ZISP(A)	ZUE(A)	tz(E)	ZISP(E)	ZUE(E)
40.00	25.694	2.407	6.605	27.275	2.033	5.718
41.00	24.352	2.418	6.419	25.918	2.033	5.533
42.00	23.076	2.430	6.235	24.626	2.033	5.352
43.00	21.861	2.442	6.054	23.397	2.033	5.174
44.00	20.705	2.455	5.876	22.226	2.033	4.998
45.00	19.605	2.469	5.702	21.112	2.033	4.826
46.00	18.557	2.483	5.530	20.050	2.033	4.657
47.00	17.559	2.498	5.362	19.038	2.033	4.490
48.00	16.608	2.514	5.196	18.074	2.033	4.327
49.00	15.702	2.531	5.034	17.155	2.033	4.167
50.00	14.838	2.549	4.874	16.278	2.033	4.010

Tabelle 6.III: Wartezeiten, Zinsspannen und Zinsüberschüsse von Schnellsparerkollektiven im Hochzins-Standardtarif

	Einzahlungen zum					
	Quartalsanfang			Quartalsende		
SOFORT	tz(A)	ZISP(A)	ZUE(A)	tz(E)	ZISP(E)	ZUE(E)
40.00	26.403	2.349	6.537	28.112	2.023	5.794
41.00	24.997	2.359	6.346	26.686	2.023	5.605
42.00	23.662	2.369	6.158	25.331	2.023	5.419
43.00	22.394	2.380	5.974	24.043	2.023	5.237
44.00	21.190	2.391	5.793	22.820	2.023	5.058
45.00	20.044	2.402	5.615	21.656	2.023	4.882
46.00	18.955	2.415	5.440	20.548	2.023	4.709
47.00	17.919	2.428	5.268	19.495	2.023	4.539
48.00	16.933	2.441	5.100	18.492	2.023	4.373
49.00	15.995	2.456	4.935	17.537	2.023	4.210
50.00	15.102	2.471	4.773	16.627	2.023	4.050

Tabelle 6.IV: Wartezeiten, Zinsspannen und Zinsüberschüsse von Schnellsparerkollektiven im Niedrigzins-Standardtarif

Die Effekte bei Soforteinzahlern sind denen der Ratensparkollektive ähnlich. Die stärkste Erhöhung der Wartezeit durch Einzahlungen am Quartalsende statt am Anfang ist bei 40%-Soforteinzahlern im Niedrigzinstarif zu verzeichnen. Auch bei den Soforteinzahlern nimmt die Wartezeitverkürzung durch Einzahlungen am Quartalsanfang mit der Höhe der Soforteinzahlung ab. Die Zinsspannen bei Zahlung am Quartalsanfang differieren um 0.37 bis 0.52 Prozentpunkte im Hochzinstarif und 0.33 bis 0.45 im Niedrigzinstarif von der Spanne bei Zahlung am Quartalsende. Die Differenzen im Zinsüberschuß sind auch für Soforteinzahlerkollektive weitgehend unabhängig von der Höhe der Soforteinzahlung.

Die bisherigen Vergleiche bezogen sich auf die Wirkung der Wahl des Einzahlungszeitpunktes der Bausparer auf Zinsüberschuß und Zinsspanne der Bausparkasse bei fixiertem Anlegungsgrad. Es wurde also implizit unterstellt, daß die Zielbewertungszahl von der Bausparkasse jeweils so festgelegt wird,

daß unabhängig vom Zahlungsmodus ein bestimmter Anlegungsgrad erreicht wird. Im folgenden wird im Gegensatz dazu davon ausgegangen, daß die Zielbewertungszahl fixiert wird. Es wird dann die Wirkung verschiedener Einzahlungszeitpunkte auf die Liquidität der Bausparkasse in Form der Kassen- zu Sparerleistung verschiedener Ansparverhalten untersucht. In den Tabellen 6.V bis 6.VIII sind die Wartezeiten bis zum Erreichen der Zielbewertungszahl 250 (Bewertungsverfahren der öffentlichen Bausparkassen) sowie die entsprechenden Kassen - zu Sparerleistungen von verschiedenen Ratensparern und Soforteinzahlern für die beiden Einzahlungsrhythmen zusammengestellt.

SR	tz	K/S(E)	K/S(A)
0.30	41.451	1.8027	1.6391
0.40	34.842	1.6283	1.4602
0.50	30.336	1.4942	1.3226
0.60	27.020	1.3852	1.2110
0.70	24.453	1.2953	1.1191
0.80	22.393	1.2172	1.0395
0.90	20.695	1.1504	0.9715
1.00	19.267	1.0905	0.9107

Tabelle 6.V: Wartezeiten und Kassen- zu Sparerleistungen von Ratensparern im Hochzins-Standardtarif bei BWZ 250

SR	tz	K/S(E)	K/S(A)
0.30	44.485	1.3642	1.2397
0.40	37.254	1.2300	1.1021
0.50	32.336	1.1266	0.9961
0.60	28.723	1.0425	0.9102
0.70	25.932	0.9721	0.8384
0.80	23.696	0.9120	0.7773
0.90	21.857	0.8606	0.7250
1.00	20.311	0.8158	0.6794

Tabelle 6.VI: Wartezeiten und Kassen- zu Sparerleistungen von Ratensparern im Niedrigzins-Standardtarif bei BWZ 250

SR	tz	K/S(E)	K/S(A)
40.00	19.037	1.6917	1.5255
41.00	18.341	1.6543	1.4871
42.00	17.677	1.6173	1.4491
43.00	17.041	1.5808	1.4115
44.00	16.432	1.5446	1.3745
45.00	15.848	1.5078	1.3368
46.00	15.288	1.4728	1.3010
47.00	14.750	1.4383	1.2655
48.00	14.233	1.4040	1.2304
49.00	13.736	1.3700	1.1957
50.00	13.257	1.3369	1.1618

Tabelle 6.VII: Wartezeiten und Kassen- zu Sparerleistungen von Soforteinzahlern im Hochzins-Standardtarif bei *BWZ* 250

SR	tz	K/S(E)	K/S(A)
40.00	22.602	1.3597	1.2353
41.00	21.769	1.3309	1.2058
42.00	20.972	1.3024	1.1765
43.00	20.210	1.2742	1.1475
44.00	19.481	1.2450	1.1177
45.00	18.781	1.2176	1.0896
46.00	18.110	1.1904	1.0617
47.00	17.466	1.1634	1.0340
48.00	16.846	1.1365	1.0065
49.00	16.251	1.1103	0.9797
50.00	15.677	1.0832	0.9520

Tabelle 6.VIII: Wartezeiten und Kassen- zu Sparerleistungen von Soforteinzahlern im Niedrigzins-Standardtarif bei *BWZ* 250

Im Hochzinstarif ist die Auswirkung der Verschiebung aller Einzahlungen vom Quartalsanfang auf das Quartalsende etwas höher als im Niedrigzinstarif. Die Kassen- zu Sparerleistungen und damit die Anlegungsgrade im statischen

Beharrungszustand bei Zielbewertungszahl 250 unterscheiden sich für diese beiden Extremfälle im Hochzinstarif je nach Sparverhalten um 0.17 bis 0.18, im Niedrigzinstarif um 0.13 bis 0.14.

Als Fazit dieses Abschnitts bleibt festzuhalten, daß die Bausparer durch ihren Zahlungsrhythmus einen erheblichen Einfluß auf die Liquiditäts- und Ertragslage einer Bausparkasse ausüben können. Der Begriff der "zementierten Zinsspanne"[1] im Bausparen kann sich demnach sinnvollerweise ausschließlich auf die tariflichen Zinssätze für die Spar- und Darlehensphase beziehen. Die Zinsspanne in der hier benutzten Definition (vgl. 3.2.1.7, Formel (3.97)) kann von dieser hypothetischen Größe je nach dem Verhalten der Bausparer stark abweichen.

6.1.2 Änderungen des Sparverhaltens

In diesem Abschnitt werden mit Hilfe des Simulationsmodells die Auswirkungen von Änderungen des Sparverhaltens in ihrem zeitlichen Ablauf dargestellt. Von der Theorie her ist es klar, daß Bausparkollektive mit unterschiedlichem Sparverhalten auch qualitativ und quantitativ verschiedene Beharrungszustände aufweisen, die mit dem Formelmodell berechnet werden können.

In der Bausparpraxis ist seit langem ein Absinken der Sparintensität zu beobachten. Die Sparintensität wird hier definiert als das in Prozent ausgedrückte Verhältnis der tatsächlich geleisteten Spareinzahlungen zu den tariflich vorgesehenen Regelsparleistungen:

$$SPINT = 100 \frac{SPE}{SRATE \cdot VSNZ} .$$

Die Sparintensität lag noch im Jahr 1965 bei etwa 250%[2]. Seitdem ist sie kontinuierlich bis auf den heutigen Wert von knapp 120% abgesunken. Solche Veränderungen des Sparverhaltens können die Liquiditätslage von Bausparkassen kurzfristig erheblich verändern. Bei konstanter Zielbewertungszahl ändert sich dadurch der Zuteilungsrhythmus. Deswegen kann der Anlegungsgrad in einzelnen Perioden drastisch steigen und anschließend wieder sinken oder umgekehrt.

Die Wirkungen von Veränderungen des Sparverhaltens können durch Formelmodelle nur in der oben erwähnten Weise komparativ-statisch untersucht

[1] vgl. z.B.: Laux,H., Die Zinsspanne . . ., a.a.O., S.461.

[2] vgl. Bundesgeschäftsstelle Landesbausparkassen, Jahresberichte, Bonn 1957-1983 Verband der privaten Bausparkassen, Berichte über die Geschäftsjahre 1957-1983, Bonn.

werden. Die zeitlichen Abläufe der Änderungen in den kollektiven Beständen lassen sich durch ein Formelmodell nicht darstellen. Diese Fragestellung ist ein typisches Anwendungsbeispiel für das Simulationsmodell zur Bearbeitung bausparteclinischer Probleme allgemeiner Bedeutung. Als Ansatz zur Untersuchung dieser Problemstellung wird zunächst ein Bausparkollektiv mit konstanter Schichtenzusammensetzung bis zu seinem Beharrungszustand simuliert. Die Steuerung der Simulation erfolgt über eine ebenfalls konstante Zielbewertungszahl. Nach Erreichen des Beharrungszustandes wird die Sparintensität im Kollektiv verändert und die Simulation bei konstanter Zielbewertungszahl und ansonsten unveränderten Bedingungen fortgesetzt.

Zur Demonstration der grundlegenden Effekte wird als erstes Beispiel ein Kollektiv simuliert, das nur aus Ratensparern mit einer Sparrate von 0,4% besteht. Dieses Kollektiv erreicht z.B. mit dem Guthaben-Zins-Verfahren der Öffentlichen Bausparkassen ($SFAKT = 0$, $KFAKT = 1$, $ZFAKT = 10$, $NFAKT = 0.004$) bei einer Zielbewertungszahl von 300 nach 18 Jahren seinen statischen Beharrungszustand bei einem Anlegungsgrad von 0,858. Nach drei weiteren Jahren wird die Sparrate der Ratensparer von 0,4% auf 0,6% erhöht (Variante A) bzw. auf 0,25% reduziert (Variante B). Die Simulationen werden solange fortgesetzt, bis der Beharrungszustand des neuen Kollektivs erreicht ist.

In den folgenden Abbildungen ist die Entwicklung der kollektiven Bauspareinlagen- und Bauspardarlehensbestände sowie des Anlegungsgrades dieser Simulationen bei einem jährlichen Neugeschäft von 400 Einheiten wiedergegeben. Die Änderung der Sparrate erfolgte jeweils im Jahr 21.

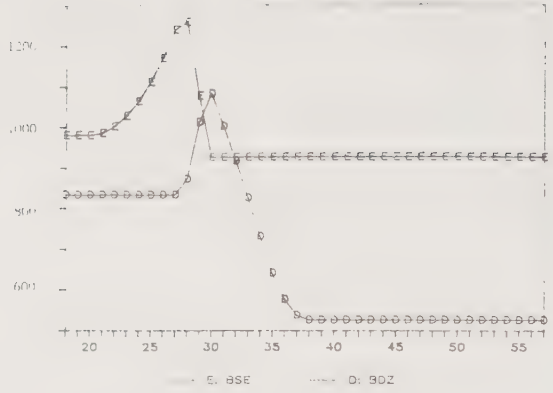

Abb. 6.IX: Kollektive Bestände Variante A

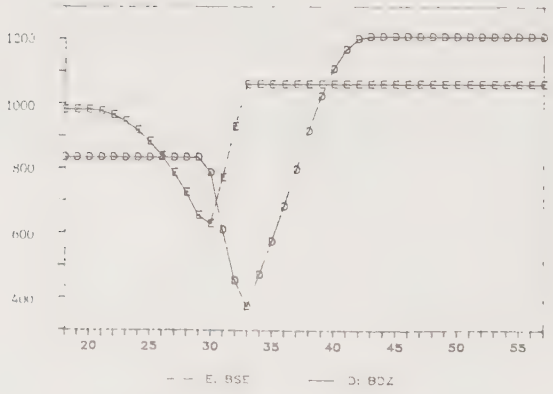

Abb. 6.X: Kollektive Bestände Variante B

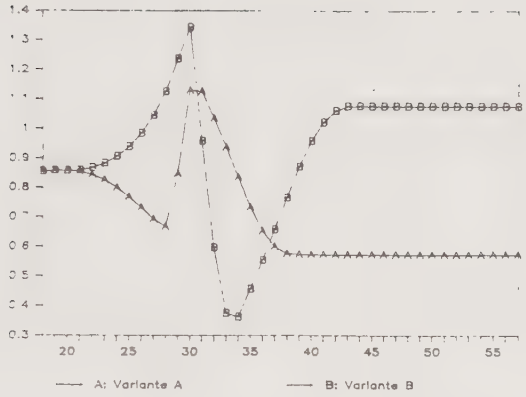

Abb. 6.XI: Anlegungsgradentwicklung Varianten A, B

Die zeitliche Entwicklung der Anlegungsgradkurven zeigt in beiden Varianten einen typischen S-förmigen Verlauf in jeweils entgegengesetzter Richtung. Die Erhöhung der Sparintensität von 100% auf 150% führt bei konstanter Zielbewertungszahl in einer Phase von acht Jahren zunächst zu einem Absinken des Anlegungsgrades von 0,858 auf 0,668. Innerhalb zweier weiterer Jahre steigt der Anlegungsgrad sehr steil auf 1,131 an und fällt bis zum 19. Jahr nach der Änderung der Sparintensität auf sein neues stationäres Niveau von 0,574. Diese heftige Reaktion des Anlegungsgrades auf eine Sparratenänderung läßt sich leicht aus dem Ablauf der Verträge erklären. Die höhere Sparintensität der neuen Sparverträge führt durch den erhöhten Spargeldeingang zu wachsenden Bauspareinlagenbeständen, während der Darlehensbestand auf dem stationären Niveau verharrt. Dadurch sinkt der Anlegungsgrad kontinuierlich. Diese Entwicklung hält solange an, bis die neu in das Kollektiv aufgenommenen Überregelsparer zugeteilt werden. Die erste solche Zuteilung erfolgt knapp acht Jahre nach Änderung der Sparrate, denn die Wartezeit der Überregelsparer bis zur Zuteilung bei Zielbewertungszahl 300 beträgt gerade 31 Quartale oder 7 3/4 Jahre. Die Spitze des Anlegungsgrades mit 1,131 im zehnten Jahr nach der Änderung fällt mit der Zuteilung des zuletzt gestarteten Regelsparers zusammen, der gerade nach 39 Quartalen oder 9 3/4 Jahren zugeteilt wird. Das schlagartige Ansteigen des

Anlegungsgrades in diesen zwei Jahren rührt daher, daß in dieser kurzen Zeit jedes Quartal zwei Verträge zugeteilt werden, nämlich ein alter Regelsparer und ein neuer Überregelsparer. Sonst wird in jedem Quartal nur ein Vertrag zugeteilt. Bis zur endgültigen Abwicklung des letzten Regelsparers 18 Jahre nach der Veränderung fällt der Anlegungsgrad auf sein neues stationäres Niveau.

Der Verlauf des Anlegungsgrades in Variante B ist gerade spiegelbildlich zu dem der Variante A. Das Erklärungsmuster ist das gleiche, nur sind die Wirkungen gerade umgekehrt. Der Anlegungsgrad steigt zunächst wegen des niedrigeren Spargeldeingangs bis zur Zuteilung des letzten Regelsparers an. Wegen der längeren Wartezeit des Unterregelsparers bis zur Zuteilung gibt es danach drei Jahre ohne Zuteilungen. Dadurch sinkt der Anlegungsgrad von 1,344 auf 0,363 ab. Mit einsetzender Zuteilung der Unterregelsparer steigt der Anlegungsgrad bis auf sein neues stationäres Niveau von 1,076 an.

In den folgenden zwei Abbildungen sind die Zinsüberschüsse und Zinsspannen der beiden Simulationsrechnungen wiedergegeben. Im Zinsüberschuß und damit in der Zinsspanne sind hierbei die abgegrenzten und zinsanteilig aufgelösten Darlehensgebühren berücksichtigt. Für die Anlage nicht in Bauspardarlehen angelegter Kollektivmittel wurde ein Anlagezinssatz von 7% unterstellt. Die Aufnahme von Fremdmitteln bei Anlegungsgraden über 1 wurde mit 9% Refinanzierungszinssatz verrechnet.

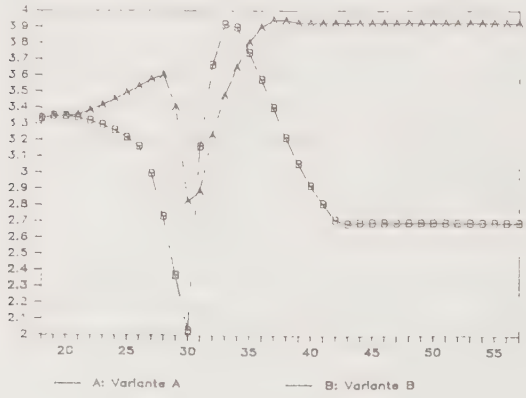

Abb. 6.XII: Zinsspanne Varianten A, B

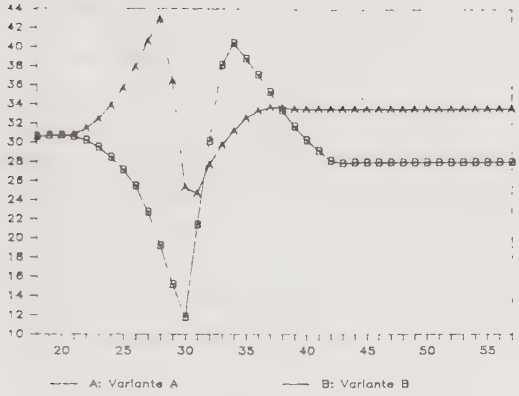

Abb. 6.XIII: Zinsüberschuß Varianten A, B

Die Abbildungen 6.XII und 6.XIII machen den durchschlagenden Effekt des Anlegungsgrades auf die Ertragslage einer Bausparkasse deutlich. Die direkten Effekte der Kollektivveränderung werden von den Einflüssen des Anlegungsgrades fast vollständig überlagert. Die Kurvenverläufe von Zinsspanne und Zinsüberschuß sind nahezu spiegelbildlich zu denen des Anlegungsgrades.

Variante A weist trotz deutlich geringerer kollektiver Bestände einen höheren Zinsüberschuß (33.6) im Beharrungszustand aus als Variante B (28.0). In der Zinsspanne ist der Unterschied auch dementsprechend stärker. Diese großen Unterschiede in der Ertragslage sind hauptsächlich auf die Anlegungsgrade zurückzuführen, die hier im Beharrungszustand mit 0.574 (Variante A) und 1.076 (Variante B) stark voneinander abweichen. Eine zweite wesentliche Determinante des Zinsüberschusses neben dem Anlegungsgrad ist das Bilanzvolumen der Bausparkasse. Dieses ist stark abhängig von der Umschlagsgeschwindigkeit des Kollektivs, die im wesentlichen von der Spar- und der Tilgungsintensität bestimmt wird. So beträgt der Bestand an Bauspardarlehen im Beharrungszustand der Variante B das 2,3-fache der Variante A, der Einlagenbestand das 1,15-fache der Variante A. Der Zinsüberschuß kann demnach bei gleichem Neugeschäft je nach Qualität des Neugeschäfts also deutlich verschiedene Größenordnungen erreichen.

Als wesentliches Resultat dieser Analyse läßt sich feststellen, daß Veränderungen im Sparverhalten eines Bausparkollektivs bei konstanter Zielbewertungszahl starke Schwankungen der Liquiditätslage der Bausparkasse und somit mittelbar auch der Ertragslage im Zeitablauf hervorrufen können. Die obige Untersuchung unterstellt zwar extreme Bedingungen in Form einer abrupten vollständigen Änderung der Spargewohnheiten, die in der Bausparpraxis so sicher nicht vorkommen. Dadurch werden die Effekte jedoch besonders deutlich, die auch bei geringfügigeren Veränderungen des Sparverhaltens auftreten. In der Bausparpraxis werden aber auch häufig von Jahr zu Jahr stark schwankende Volumina des Schnellspargeschäftes beobachtet. Wegen der hohen sofortigen Einzahlung dieser Verträge treten dadurch ähnlich abrupte Veränderungen des Spargeldeingangs auf, wie sie hier simuliert wurden.

6.2 Interdependenzen zwischen Sparerschichten eines Bausparkollektivs

In diesem Abschnitt wird die Anlegungsgradsteuerung des Simulationsmodells dazu benutzt, Interdependenzen zwischen verschiedenen Sparerschichten in einem Bausparkollektiv aufzuzeigen. Es wird dabei davon ausgegangen, daß im Kollektiv grundsätzlich ein bestimmter Anlegungsgrad herrschen soll. Je nach Zusammensetzung des Kollektivs sind dazu unterschiedliche Zielbewertungszahlenniveaus notwendig. Diese verschiedenen Größenordnungen geben zusammen mit den zugehörigen Schichtenstatistiken Aufschluß darüber, welche Sparerschichten in gemischten Kollektiven unter verschiedenen Umständen eine forcierte Zuteilung anderer Schichten subventionieren.

6.2.1 Zielbewertungszahlen und Wartezeiten verschiedener Sparerschichten bei unterschiedlichen Anlegungsgraden

Grundlage der Untersuchungen des Abschnitts 6.2 ist wiederum das Guthaben-Zins-Bewertungsverfahren, wie es z.B. von den Öffentlichen Bausparkassen angewendet wird. Für das Neugeschäft wird angenommen, daß es über die Jahre konstant ist. Als Einzahlungszeitpunkt wird das Quartalsende gewählt. In die Betrachtungen dieses Abschnitts werden die beiden Standardtarife des deutschen Bausparsystems sowie der Niedrigzins-Schnelltarif (im folgenden als Tarif IV bezeichnet) und der Hochzins Langzeittarif (im folgenden als Tarif V bezeichnet) einbezogen. In diesen vier Tarifen werden jeweils Regelsparer, Unterregelsparer,

Überregelsparer und Soforteinzahler in der Definition der folgenden Tabelle 6.XIV berücksichtigt.

Tarif	Sparertyp	Name	SOFORT	SRATE
I	Regelsparer	SP1-REG	0	0.4
I	Unterregelsparer	SP1-UREG	0	0.25
I	Ueberregelsparer	SP1-MREG	0	0.6
I	Soforteinzahler	SP1-SN40	40	0
II	Regelsparer	SP1-REG	0	0.4
II	Unterregelsparer	SP1-UREG	0	0.25
II	Ueberregelsparer	SP1-MREG	0	0.6
II	Soforteinzahler	SP1-SN40	40	0
IV	Regelsparer	SP1-REG	0	0.7
IV	Unterregelsparer	SP1-UREG	0	0.4
IV	Ueberregelsparer	SP1-MREG	0	1.0
IV	Soforteinzahler	SP1-SN50	50	0
V	Regelsparer	SP1-REG	0	0.3
V	Unterregelsparer	SP1-UREG	0	0.2
V	Ueberregelsparer	SP1-MREG	0	0.4
V	Soforteinzahler	SP1-SN50	50	0

Tabelle 6.XIV: Sparerschichten

Für jede dieser 16 Sparerschichten werden zunächst die Wartezeiten und damit implizit die Zielbewertungszahlen bestimmt, bei denen jeweils Kollektive, die ausschließlich aus diesen Schichten bestehen, Anlegungsgrade von 0.8, 0.9 und 1 erreichen. Aus dem so entstehenden Zielbewertungszahlengefüge läßt sich dann bereits erkennen, welche Sparerschichten andere in gemischten Kollektiven subventionieren. Werden zwei Schichten in einem Kollektiv geführt, die für den gleichen kollektiven Anlegungsgrad unterschiedliche Zielbewertungszahlen benötigen, so profitiert die Schicht von der Schichtenmischung, die den kollektiven Anlegungsgrad bei einer höheren Zielbewertungszahl erreicht.

Die Wartezeiten der einzelnen Schichten bei den verschiedenen Anlegungsgraden und die zugehörigen Zielbewertungszahlen können mit

dem verallgemeinerten Kassengleichungssystem (3.84), (3.85) und (3.52) des Formelmodells ermittelt werden. Dazu werden in die Kassengleichung (3.84) jeweils der gewünschte Anlegungsgrad und die Schichtenmerkmale eingesetzt und das resultierende Kassengleichungssystem gelöst. Es ergibt sich dabei, daß die Soforteinzahler in allen Tarifen von den Ratensparern profitieren. Interessant ist, daß der Abstand der mittleren Bewertungszahlen des Soforteinzahlers von denen der Ratensparer bei höherem Anlegungsgrad immer geringer wird. Im Tarif I etwa haben Soforteinzahler und Unterregelsparer fast die gleiche mittlere Bewertungszahl. Für alle Tarife läßt sich feststellen, daß Ratensparer mit niedrigeren Raten von Sparern mit höheren Raten profitieren.

Ein Vergleich der Tarife untereinander ergibt, daß sich Ratensparer im Hochzins-Standardtarif besonders gut stehen, denn dort profitieren sie von vergleichbaren Ratensparern in allen anderen Tarifen. Soforteinzahler profitieren in den Tarifen I und IV stärker als im Tarif II. Die noch höheren Bewertungszahlen der Soforteinzahler im Langzeittarif dürfen nicht zu dem Fehlschluß führen, daß dieser Tarif für Soforteinzahler besonders geeignet sei, denn wegen der langen Wartezeit bis zur Zuteilung kollidiert dieser Tarif mit den Zielen der meisten Schnellsparer, die möglichst bald ein Darlehen wünschen.

	Anlegungsgrad					
	0.8		0.9		1.0	
Schicht	tz (E)	BWZ	tz (E)	BWZ	tz (E)	BWZ
SP1-REG	40.296	321.264	39.407	309.159	38.605	298.265
SP1-UREG	55.908	355.953	54.606	340.507	53.433	326.928
SP1-MREG	29.960	295.849	29.341	285.849	28.781	276.959
SP1-SN40	31.351	366.441	29.160	344.885	27.275	326.779
SP2-REG	40.697	289.831	39.762	278.835	38.920	268.957
SP2-UREG	56.676	316.705	55.288	303.000	54.041	290.744
SP2-MREG	30.183	270.384	29.537	261.254	28.953	253.141
SP2-SN40	32.634	327.985	30.194	308.646	28.112	292.248
SP4-REG	25.368	292.295	24.779	281.274	24.248	271.521
SP4-UREG	38.079	326.560	37.099	311.818	36.220	298.892
SP4-MREG	19.362	274.449	18.948	265.388	18.573	257.320
SP4-SN50	15.505	305.895	14.197	288.649	13.107	274.386
SP5-REG	55.408	296.091	54.387	285.551	53.467	276.231
SP5-UREG	73.636	340.447	72.243	327.386	70.990	316.181
SP5-MREG	44.888	267.150	44.086	258.231	43.362	250.493
SP5-SN50	28.279	296.696	26.442	279.636	24.853	264.952

Tabelle 6.XV: mittlere Wartezeiten und zugehörige Bewertungszahlen einzelner Sparerschichten bei verschiedenen Anlegungsgraden

6.2.2 Subventionierungseffekte zwischen Sparerschichten

Aus den Ergebnissen von 6.2.1 läßt sich zwar schon eine Ordinalskala der Subventionierungseffekte aller Schichten ableiten. Für jede der betrachteten Sparerschichten kann damit festgestellt werden, von welchen anderen Schichten sie in einem gemischten Kollektiv bei bestimmten Anlegungsgraden profitieren würde und welche sie subventioniert. Diese Effekte können jedoch noch nicht quantifiziert werden. Eine Quantifizierung kann erst durch die Untersuchung gemischter Kollektive erfolgen. Dazu werden Kollektive, deren Neuabschlußvolumen zu je 50% aus zwei verschiedenen Sparerschichten besteht, mit einem Zielanlegungsgrad von 0,8, 0,9 und 1 simuliert. Als Resultat ergibt sich eine Zielbewertungszahl, bei der das gemischte Kollektiv gerade den Zielanlegungsgrad erreicht, und die

durchschnittlichen Wartezeiten, Bewertungszahlen bei Zuteilung und Kassen- zu Sparerleistungen der involvierten Sparerschichten. Ein Vergleich mit den mittleren Wartezeiten aus Tabelle 6.XV läßt dann eine Quantifizierung der Subventionseffekte zu.

Um den jeweiligen Zielanlegungsgrad möglichst gut erreichen zu können, ist es notwendig, die Sparerschichten in mehrere identische aufzuspalten, die bei der Zuteilung unterschiedlich behandelt werden können. Wegen der diskreten Modellstruktur des Simulationsmodells ist sonst eine Annäherung eines bestimmten Anlegungsgrades nur sehr grob möglich. Mit dem Formelmodell ist die Zuteilung gemischter Kollektive nach Kassengleichung ziemlich aufwendig (vgl. 3.2.2.2). Aus diesem Grund wird hier die Anlegungsgradsteuerung des Simulationsmodells benutzt.

Bei einem Anlegungsgrad von 0.8 muß der Regelsparer im Hochzins-Standardtarif in einer 50%-igen Mischung mit Unterregelsparern oder 40%-Soforteinzahlern im selben Tarif 1.7 Quartale länger auf seine Zuteilung warten, als es im reinen Regelsparerkollektiv der Fall ist. Sein durchschnittlicher Belastungsgrad sinkt dadurch von 0.8 auf 0.64 (vgl. Tabelle 6.XVI). In der Kombination mit dem Überregelsparer dagegen reduziert sich die Wartezeit des Regelsparers um 1 Quartal, sein Belastungsgrad steigt auf 0.92. Die Wartezeit der Unterregelsparer verkürzt sich um 1.75 Quartale und ihr Belastungsgrad steigt auf 0.95, wenn sie mit Regelsparern kombiniert werden. Der 40%-Soforteinzahler profitiert im Hinblick auf die Wartezeit wesentlich stärker von der Kombination mit dem Regelsparer. Seine mittlere Wartezeit sinkt um 2.96 Quartale. Der Belastungsgrad ist mit 0.95 der gleiche wie beim Unterregelsparer.

Die extremsten Subventionierungseffekte beim Anlegungsgrad 0.8 im Hochzins-Standardtarif ergeben sich in den Kombinationen zwischen dem Überregelsparer einerseits und dem 40%-Soforteinzahler bzw. dem Unterregelsparer andererseits. Der Belastungsgrad des Überregelsparers sinkt dabei auf 0.54 ab und seine Wartezeit verlängert sich um gut 2 Quartale, während die beiden anderen Schichten Belastungsgrade von 1.02 erreichen. Ihre Wartezeiten werden um 2.51 Quartale (Unterregelsparer) bzw. 4.15 Quartale (Schnellsparer) abgekürzt.

Diese aufgezeigten Subventionierungseffekte sind bei den Anlegungsgraden 0.9 und 1 nicht so stark ausgeprägt. Die Struktur der Effekte ist dieselbe wie beim Anlegungsgrad 0.8. So profitiert der 40%-Soforteinzahler auch bei den

Anlegungsgraden 0.9 und 1 von der Kombination mit allen anderen betrachteten Sparerschichten. Die entsprechenden Wartezeitverkürzungen und Veränderungen der Belastungsgrade sind jedoch geringer als beim Anlegungsgrad 0.8.

Im Niedgrigzins-Standardtarif ist die Struktur der Subventionierungseffekte ähnlich wie im Hochzins-Standardtarif (vgl. Tabelle 6.XVII). Der 40%-Soforteinzahler und der Unterregelsparer profitieren von den beiden anderen Schichten. Der Überregelsparer muß auch in der Kombination mit dem Regelsparer Wartezeitverlängerungen hinnehmen. Interessant ist, daß bei den Anlegungsgraden 0.8 und 0.9 insgesamt geringere Subventionierungseffekte im Niedrigzins-Standardtarif zu beobachten sind. Beim Anlegungsgrad 1 kehrt sich dieses Verhältnis jedoch um, die Effekte sind im Niedrigzinstarif höher als im Hochzinstarif. Dies hängt mit der langsameren Entwicklung der individuellen Bewertungszahl durch den niedrigeren Guthabenszins zusammen. Dadurch werden vergleichbare Bewertungszahlen im Niedrigzinstarif bei längeren Wartezeiten als im Hochzinstarif und daher bei niedrigeren Anlegungsgraden erreicht.

Auch im Niedrigzins-Schnelltarif profitiert der Soforteinzahler, der hier wegen der höheren Mindestansparung 50% der Bausparsumme sofort zahlt, von allen anderen Schichten, jedoch in geringerem Maße als in den Standardtarifen (vgl. Tabelle 6.XVIII). Die in diesem Tarif durch die Kombination mit verschiedenen Schichten erlangbaren Vorteile bei der Wartezeit und beim Belastungsgrad sind für die betrachteten Anlegungsgrade 0.8, 0.9 und 1 fast in allen Fällen deutlich geringer. Die generelle Ausnahme hiervon ist jedoch der Unterregelsparer. Sein Belastungsgrad beträgt überall 0.72, selbst im reinen Unterregelsparer-Kollektiv. Die Erklärung hierfür ist, daß mit der vorgegebenen Sparrate von 0,4% monatlich die Mindestansparung von 50% erst so spät erreicht wird, daß ein höherer Belastungsgrad bei Regeltilgungen nicht mehr möglich ist. Die zu diesem Zeitpunkt erreichte Bewertungszahl ist so hoch, daß sie auch beim Zielanlegungsgrad 0.8 keine andere Schicht erreicht. Aus diesem Grund ändert sich die Wartezeit und der Belastungsgrad der Unterregelsparer bei verändertem Zielanlegungsgrad nicht. Mit der unverändert niedrigen Kassen- zu Sparerleistung von 0.72 ermöglicht der Unterregelsparer den anderen Schichten erhebliche Wartezeitverkürzungen. Die für den Unterregelsparer in Tabelle 6.XVIII ausgewiesenen Abweichungen von den mittleren Wartezeiten der Tabelle 6.XV rühren daher, daß in den Berechnungen für Tabelle 6.XV die Mindestansparung von 50% außer Acht gelassen wurde.

Die Zielanlegungsgrade von 0.8, 0.9 und 1 wurden dort also bei Unteransparung tatsächlich erreicht, während in den Simulationsrechnungen, die den Tabellen 6.XVI bis 6.XIX zugrunde liegen, Zuteilungen erst erfolgten, wenn die Mindestansparung erreicht war.

Insgesamt sind die echten, durch die Zielbewertungszahl bedingten Subventionierungseffekte bei allen drei Anlegungsgraden deutlich geringer als in den Standardtarifen. Bis auf den Unterregelsparer, der nicht richtig in die Konstruktion des Tarifs paßt, wird von den betrachteten Schichten keine so deutlich zur Subventionierung anderer ausgenutzt, wie in den Standardtarifen.

Im Langzeittarif (vgl. Tabelle 6.XIX) hat der Unterregelsparer bei allen drei Anlegungsgraden die stärkste Position. Er profitiert von allen anderen Schichten mehr oder minder stark. Beim Anlegungsgrad 1 weist der Unterregelsparer in der Kombination mit allen anderen Schichten den Belastungsgrad 1.06 auf. Daß dieser nirgendwo höher ausfällt, hat den gleichen Grund, wie er oben für den Unterregelsparer im Schnelltarif angeführt wurde. Die Wartezeit kann nicht weiter gesenkt werden, da sonst die Mindestansparung nicht erreicht wird. Besonders interessant ist, daß der Schnellsparer im Langzeittarif bis auf den Überregelsparer von keiner anderen Schicht Vorteile erlangen kann. Im Gegenteil, in der Kombination mit dem Unterregelsparer muß er Wartezeitverlängerungen bis zu 3.5 Quartalen hinnehmen.

Kombiniert man Regelsparer verschiedener Tarife miteinander, so ergibt sich, daß die Regelsparer im Hochzins-Standardtarif bei allen drei kollektiven Anlegungsgraden durch Mischungen mit anderen Tarifen Wartezeitverkürzungen zwischen 0.5 und 1.3 Quartale erreichen können (vgl. Tabelle 6.XX). Der Regelsparer im Hochzins-Langzeittarif hat besonders beim Anlegungsgrad 1 um bis zu 0.5 Quartalen niedrigere Wartezeiten bei Kombinationen mit dem Niedrigzins-Standardtarif und dem Niedrigzins-Schnelltarif. Die Subventionierungseffekte zwischen gleichen Sparerschichten in verschiedenen Tarifen sind also offensichtlich erheblich geringer als die zwischen verschiedenen Schichten im gleichen Tarif.

In den folgenden Tabellen 6.XVI bis 6.XIX sind für die vier untersuchten Tarife jeweils die Wartezeitunterschiede in Quartalen gegenüber der mittleren Wartezeit und die Kassen- zu Sparerleistungen der je vier untersuchten Schichten bei Mischungen mit den anderen Schichten bei den Zielanlegungsgraden 0.8, 0.9, 1 zusammengestellt. In jedem Feld dieser Tabellen ist als erste Zahl die Abweichung

von der mittleren Wartezeit aus Tabelle 6.XV für die Sparerschicht einer Zeile angegeben, wenn sie mit der Schicht einer Spalte kombiniert wird. Die zweite Zahl jedes Feldes gibt die durchschnittliche Kassen- zu Sparerleistung der Zeilen-Schicht bei Kombination mit der Spalten-Schicht an.

Anlegungsgrad = 0.8

	SP1-REG		SP1-UREG		SP1-MREG		SP1-SN40	
SP1-REG	0.0	0.800	1.704	0.643	-0.999	0.923	1.704	0.643
SP1-UREG	-1.748	0.949	0.0	0.800	-2.513	1.017	0.359	0.785
SP1-MREG	1.040	0.661	2.040	0.542	0.0	0.800	2.040	0.542
SP1-SN40	-2.957	0.949	-0.351	0.824	-4.151	1.015	0.0	0.800

Anlegungsgrad = 0.9

	SP1-REG		SP1-UREG		SP1-MREG		SP1-SN40	
SP1-REG	0.0	0.900	1.509	0.744	-0.607	0.985	1.330	0.763
SP1-UREG	-1.573	1.048	0.0	0.900	-2.035	1.094	0.394	0.878
SP1-MREG	0.659	0.802	1.659	0.661	0.0	0.900	1.666	0.660
SP1-SN40	-2.160	1.027	-0.301	0.925	-3.262	1.095	0.0	0.900

Anlegungsgrad = 1.0

	SP1-REG		SP1-UREG		SP1-MREG		SP1-SN40	
SP1-REG	0.0	1.000	1.345	0.847	-0.605	1.094	1.343	0.847
SP1-UREG	-1.404	1.147	0.0	1.000	-2.433	1.257	0.434	0.973
SP1-MREG	0.657	0.893	1.971	0.694	0.0	1.000	1.269	0.794
SP1-SN40	-2.177	1.148	-0.275	1.027	-2.379	1.162	0.0	1.000

Tabelle 6.XVI: Wartezeitabweichungen und Belastungsgrade im Hochzins-Standardtarif in gemischten Kollektiven

Anlegungsgrad = 0.8

	SP2-REG		SP2-UREG		SP2-MREG		SP2-SN40	
SP2-REG	0.0	0.800	1.303	0.684	-0.837	0.897	1.503	0.667
SP2-UREG	-1.376	0.911	0.0	0.800	-2.283	0.982	0.624	0.770
SP2-MREG	0.817	0.694	1.817	0.575	0.0	0.800	1.817	0.575
SP2-SN40	-2.634	0.917	-0.634	0.832	-3.940	0.979	0.0	0.800

Anlegungsgrad = 0.9

	SP2-REG		SP2-UREG		SP2-MREG		SP2-SN40	
SP2-REG	0.0	0.900	1.185	0.782	-0.762	0.999	1.238	0.777
SP2-UREG	-1.248	1.010	0.0	0.900	-1.794	1.058	0.292	0.887
SP2-MREG	0.766	0.790	1.463	0.694	0.0	0.900	1.561	0.681
SP2-SN40	-2.199	1.015	-0.194	0.917	-3.194	1.070	0.0	0.900

Anlegungsgrad = 1.0

	SP2-REG		SP2-UREG		SP2-MREG		SP2-SN40	
SP2-REG	0.0	1.000	1.080	0.881	-0.920	1.131	1.080	0.881
SP2-UREG	-1.046	1.103	0.0	1.000	-2.041	1.199	0.266	0.989
SP2-MREG	0.902	0.857	1.644	0.748	0.0	1.000	1.502	0.769
SP2-SN40	-1.810	1.111	-0.112	1.015	-3.112	1.193	0.0	1.000

Tabelle 6.XVII: Wartezeitabweichungen und Belastungsgrade im Niedrigzins-Standardtarif in gemischten Kollektiven

Anlegungsgrad = 0.8

	SP4-REG		SP4-UREG		SP4-MREG		SP4-SN50	
SP4-REG	0.0	0.800	-0.622	0.914	-0.672	0.923	0.632	0.710
SP4-UREG	0.921	0.722	0.0	0.722	0.921	0.722	0.921	0.722
SP4-MREG	0.638	0.670	-0.513	0.933	0.0	0.800	0.638	0.670
SP4-SN50	-1.158	0.895	-1.205	0.899	-1.357	0.912	0.0	0.800

Anlegungsgrad = 0.9

	SP4-REG		SP4-UREG		SP4-MREG		SP4-SN50	
SP4-REG	0.0	0.900	-1.136	1.136	-0.779	1.058	0.221	0.868
SP4-UREG	1.901	0.722	0.0	0.722	1.901	0.722	1.901	0.722
SP4-MREG	0.749	0.733	-1.198	1.268	0.0	0.900	0.599	0.766
SP4-SN50	-0.299	0.933	-2.849	1.216	-1.197	1.019	0.0	0.900

Anlegungsgrad = 1.0

	SP4-REG		SP4-UREG		SP4-MREG		SP4-SN50	
SP4-REG	0.0	1.000	-0.755	1.171	-0.350	1.080	0.150	0.979
SP4-UREG	2.780	0.722	0.0	0.722	2.780	0.722	2.780	0.722
SP4-MREG	0.365	0.910	-1.573	1.555	0.0	1.000	0.427	0.894
SP4-SN50	-0.107	1.019	-4.058	1.624	-0.810	1.096	0.0	1.000

Tabelle 6.XVIII: Wartezeitabweichungen und Belastungsgrade im Niedrigzins-Schnelltarif in gemischten Kollektiven

Anlegungsgrad = 0.8

	SP5-REG		SP5-UREG		SP5-MREG		SP5-SN50	
SP5-REG	0.0	0.800	2.592	0.599	-1.408	0.955	0.436	0.772
SP5-UREG	-2.217	0.980	0.0	0.800	-3.136	1.059	-1.636	0.933
SP5-MREG	1.647	0.635	3.259	0.496	0.0	0.800	1.112	0.688
SP5-SN50	-0.231	0.823	3.527	0.654	-1.680	0.903	0.0	0.800

Anlegungsgrad = 0.9

	SP5-REG		SP5-UREG		SP5-MREG		SP5-SN50	
SP5-REG	0.0	0.900	2.118	0.715	-1.387	1.070	0.012	0.913
SP5-UREG	-1.743	1.059	0.0	0.900	-1.743	1.059	-1.593	1.046
SP5-MREG	1.609	0.720	1.912	0.689	0.0	0.900	0.914	0.798
SP5-SN50	0.558	0.880	3.401	0.736	-1.294	0.994	0.0	0.900

Anlegungsgrad = 1.0

	SP5-REG		SP5-UREG		SP5-MREG		SP5-SN50	
SP5-REG	0.0	1.000	0.890	0.917	-1.393	1.189	-0.310	1.052
SP5-UREG	-0.490	1.059	0.0	1.000	-0.490	1.059	-0.490	1.059
SP5-MREG	1.599	0.803	0.838	0.899	0.0	1.000	0.638	0.924
SP5-SN50	1.134	0.940	1.429	0.922	-0.714	1.064	0.0	1.000

Tabelle 6.XIX: Wartezeitabweichungen und Belastungsgrade im Hochzins-Langzeittarif in gemischten Kollektiven

In Tabelle 6.XX sind in analoger Weise zu den Tabellen 6.XVI bis 6.XIX die Subventionierungseffekte zwischen Regelsparern verschiedener Tarife erfaßt.

Anlegungsgrad = 0.8

	SP1-REG		SP2-REG		SP4-REG		SP5-REG	
SP1-REG	0.0	0.800	-1.097	0.935	-0.499	0.864	-1.296	0.960
SP2-REG	1.303	0.684	0.0	0.800	0.303	0.777	0.303	0.777
SP4-REG	0.632	0.710	-0.169	0.835	0.0	0.800	0.632	0.710
SP5-REG	1.187	0.707	-0.012	0.813	-0.254	0.836	0.0	0.800

Anlegungsgrad = 0.9

	SP1-REG		SP2-REG		SP4-REG		SP5-REG	
SP1-REG	0.0	0.900	-1.012	1.039	-1.060	1.046	-0.508	0.973
SP2-REG	1.238	0.777	0.0	0.900	-0.114	0.921	0.574	0.845
SP4-REG	1.221	0.710	0.221	0.868	0.0	0.900	0.221	0.868
SP5-REG	0.613	0.851	-0.194	0.934	0.049	0.909	0.0	0.900

Anlegungsgrad = 1.0

	SP1-REG		SP2-REG		SP4-REG		SP5-REG	
SP1-REG	0.0	1.000	-0.859	1.131	-0.655	1.101	-0.605	1.094
SP2-REG	1.080	0.881	0.0	1.000	0.080	0.999	0.978	0.893
SP4-REG	0.801	0.860	0.047	0.999	0.0	1.000	0.749	0.869
SP5-REG	0.683	0.939	-0.467	1.070	-0.321	1.053	0.0	1.000

Tabelle 6.XX: Wartezeitabweichungen und Belastungsgrade von Regelsparern in Kollektivmischungen aus verschiedenen Tarifen

Die obige Analyse von Subventionierungseffekten zwischen verschiedenen Bausparerschichten zeigt, daß die herkömmlichen Tarife in etwa auf das typische Verhalten des Regelsparers zugeschnitten sind. Stark davon abweichende Sparverhalten führen oft dazu, daß sich der Belastungsgrad zuungunsten des Sparers verändert. Für das Bausparkollektiv und die Bausparkasse ist dies in-

sofern ein Schutz, als das von einem Bausparer erwartete Regelsparverhalten aus der Sicht des Kollektivs in etwa die maximale Belastung darstellt. Unvorhergesehene Abweichungen von diesem Verhalten wirken sich für das Kollektiv fast ausnahmslos positiv aus.

6.3 Tarifanalyse am Beispiel eines Universaltarifs

In diesem Teil wird anhand eines Universaltarifs, wie er z.B. von der Bausparkasse MAINZ AG unter der Bezeichnung D geführt wird (vgl. 2.4.3 und 4.3.1.4), dargestellt, wie das in den Teilen 3 und 4 entwickelte methodische Instrumentarium dazu verwendet werden kann, einen Bauspartarif auf seine Funktionsfähigkeit und mögliche Gefahren hin zu untersuchen. Dazu wird zunächst eine systematische Analyse der Liquiditäts- und Ertragswirkungen dieses Tarifs mit dem Formelmodell durchgeführt. Danach werden spezielle Fragestellungen, die sich aus der Konstruktion des Tarifs ergeben, mit dem Simulationsmodell untersucht.

Diese Vorgehensweise läßt sich für die Konstruktion neuer Bauspartarife erweitern. Im vorliegenden Abschnitt wird lediglich ein bereits eingeführter Bauspartarif untersucht. Bei einer Entscheidung über Einführung und Gestaltung neuer Bauspartarife ist es angebracht, z. B. mögliche Alternativen in bezug auf die Zins- und Gebührenpolitik durch Simulationsrechnungen gegeneinander abzuwägen. In diesem Zusammenhang sind Hoch- bzw. Niedrigzinsvarianten, gebührenfreie Varianten, Agio- oder Disagiovarianten zu nennen.

Auch die Wahl des Bewertungsverfahrens steht bei der Konstruktion neuer Tarife zur Disposition. Je nach dem Ziel, das mit einem bestimmten Tarif verfolgt wird, kann es sinnvoll sein, entweder nur die Höhe der verschiedenen Bewertungsfaktoren (*SFAKT*,*KFAKT*,*ZFAKT*,*NFAKT*) oder sogar die Methode (Saldensummen-, Zins-, Guthaben-Zins-Methode) spezifisch festzulegen. Die Effekte verschiedener Alternativen lassen sich durch vergleichende Berechnungen mit dem Formelmodell und Simulationsrechnungen herausarbeiten.

Das Feld der Tarifkonstruktion läßt sich nach der Breite der einzubeziehenden Möglichkeiten grob in drei Kategorien einteilen. Tarifkonstruktion im engen Sinn beschränkt sich auf die Variation der Parameter bereits existierender Bauspartarife. Als Beispiel hierfür ist etwa der Niedrigzins-Standardtarif zu nennen, der aus dem Hochzins-Standardtarif durch Erniedrigung des Guthabens-

und Darlehenszinssatzes um jeweils ein halbes Prozent entstand. Dagegen fallen unter die zweite Kategorie, die Tarifkonstruktion im weiteren Sinn, beliebige Kombinationen der Merkmale existierender Tarife und das Hinzufügen neuer Merkmale, die das System des kollektiven Bausparens an sich jedoch unverändert lassen. Darunter ist z. B. die Einführung von Disagiovarianten zu fassen. Tarifkonstruktion im weitesten Sinn begreift auch die bislang unangetasteten Merkmale des kollektiven Bausparsystems als variable Größen und kann daher systemverändernd wirken. Ein bereits vollzogenes Beispiel hierfür ist die teilweise Aufgabe der Funktion der Bausparsumme durch die Einführung fixierter Darlehensansprüche.

Der erste Teilbereich der Tarifkonstruktion kann mit dem entwickelten Instrumentarium vollständig abgedeckt werden. Fragestellungen aus diesem Bereich sind mit dem Formelmodell und dem Simulationsmodell analysierbar. Tarifkonstruktion im weiteren Sinn wird von den vorgestellten Modellen zumindest soweit erfaßt, wie es sich um die Kombination bereits existierender Tarifmerkmale handelt. Für das Hinzufügen neuer, nicht systemverändernder Merkmale ist meist eine Erweiterung der Modelle notwendig.

6.3.1 Systematische Analyse der Liquiditäts- und Ertragswirkungen

In den Allgemeinen Bedingungen für Bausparverträge sind für alle Tarife Regelsparraten vorgesehen, die jedoch nicht bindend sind. Da Sonderzahlungen jederzeit möglich sind, und die Bausparkassen keinen Gebrauch von ihrer Möglichkeit machen, Bausparverträge bei rückständigen Regelsparbeiträgen zu kündigen, enthalten ihre Bestände die verschiedensten Ansparverhalten innerhalb eines Tarifs. Damit eine Bausparkasse dadurch nicht vor unerwartete Probleme gestellt wird, ist es sinnvoll, die Bandbreite der möglichen Ansparverhalten in einem Tarif vor seiner Einführung auf solche Probleme hin zu untersuchen. Um möglichst vollständige Informationen zu erhalten, müssen in diese Untersuchungen auch verschiedene denkbare Niveaus der Zielbewertungszahl einbezogen werden.

Der Universaltarif birgt in dieser Hinsicht zwei erhebliche Risiken. Die Zielbewertungszahl kann im Universaltarif nur sehr eingeschränkt die Funktion der Liquiditätssteuerung übernehmen. In den herkömmlichen Bauspartarifen führt eine Erhöhung der Zielbewertungszahl zu verlängerten Wartezeiten bis zur Zuteilung und zu niedrigeren Belastungsgraden. Dieses Regulativ fällt infolge

der bewertungszahlabhangigen Tilgungsraten fast völlig weg. Zum anderen ist die Hochzinsvariante wegen der großen Differenz zwischen den beiden wählbaren Darlehenszinssätzen wesentlich kollektivbelastender als die Niedrigzinsvariante. In bezug auf die am Gesamtbarwert gemessene Ertragswirkung ist der Universaltarif unproblematisch. Wie bei anderen Tarifen ist der Barwert hauptsächlich eine Funktion der Abwicklungsdauer eines Bausparvertrages.

Im folgenden werden die Kassen- zu Sparerleistung als Maßgröße für die langfristige Liquiditätswirkung eines Bausparers und der Gesamtbarwert als Maßgröße für seine Ertragswirkung als Funktion verschiedener Sparverhalten und Zielbewertungszahlen in Graphiken dargestellt. Dazu werden mit dem Formelmodell auf Halbjahresbasis (wegen des entsprechenden Berechnungsmodus für die Bewertungszahlen) Bausparer im Tarif D der MAINZ AG mit monatlichen Sparraten von 0,1% bis 1% mit Zielbewertungszahlen von 3.5 bis 8.9 durchgerechnet. Die so berechneten Kassen- zu Sparerleistungen und Gesamtbarwerte, die mit einem Diskontierungsfaktor von 5% berechnet werden, sind in den Abbildungen 6.XXI und 6.XXII in Form einer Fläche als Funktion der Sparrate und der Zielbewertungszahl dargestellt. Dabei wurde unterstellt, daß die Sparer für die Hochzinsvariante des Tarifs D mit 2.5% + 1,5% Guthabens- bzw. Bonuszins und 6% Darlehenszins optieren. Die entsprechenden Graphiken für die Niedrigzinsvariante sind in den Abbildungen 6.XXIII und 6.XXIV dargestellt. Zum Vergleich finden sich in 6.XXV und 6.XXVI die entsprechenden Abbildungen für den Hochzins-Standardtarif.

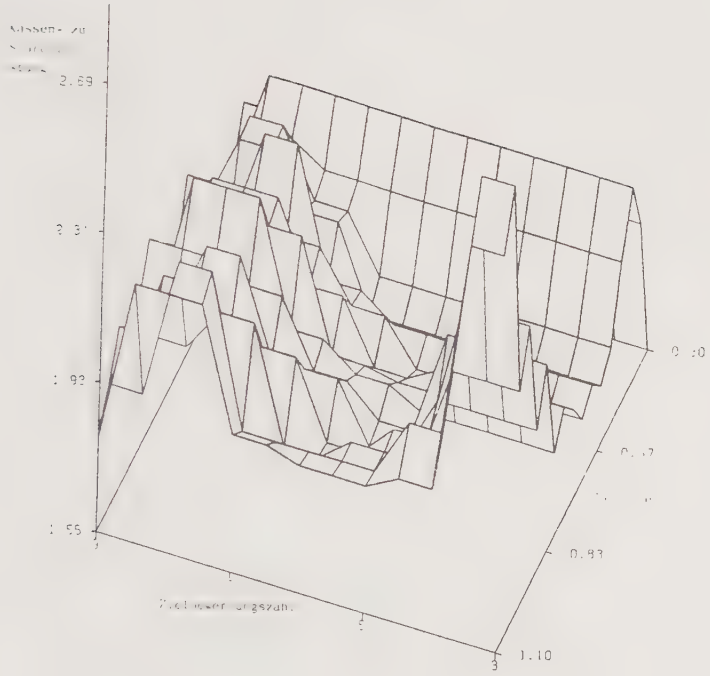

Abb. XXI: Kassen- zu Sparerleistung in der Hochzinsvariante des Tarifs D der MAINZ AG als Funktion der Sparrate und der Zielbewertungszahl

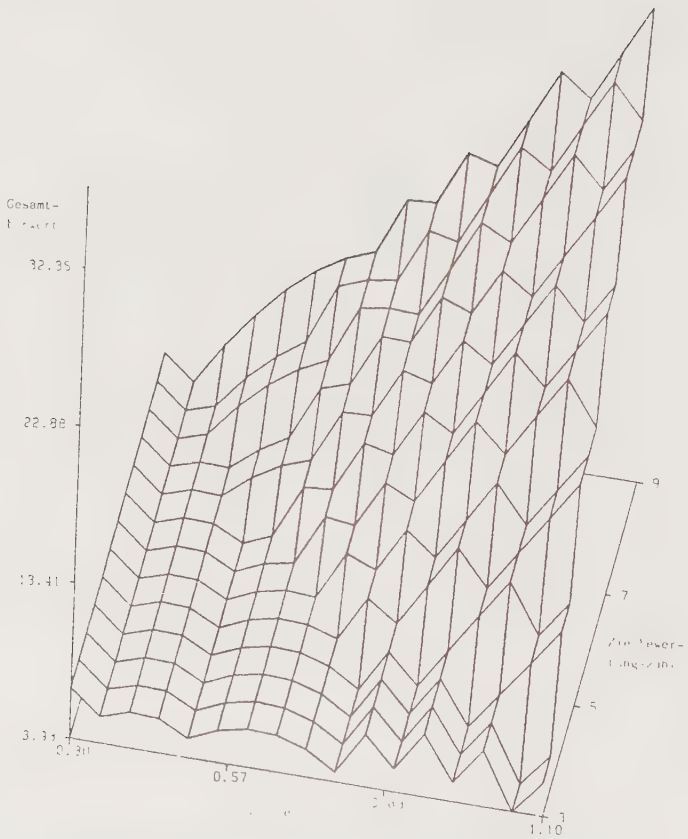

Abb. 6.XXII: Gesamtbarwert in der Hochzinsvariante des Tarifs D der MAINZ AG als Funktion der Sparrate und der Zielbewertungszahl

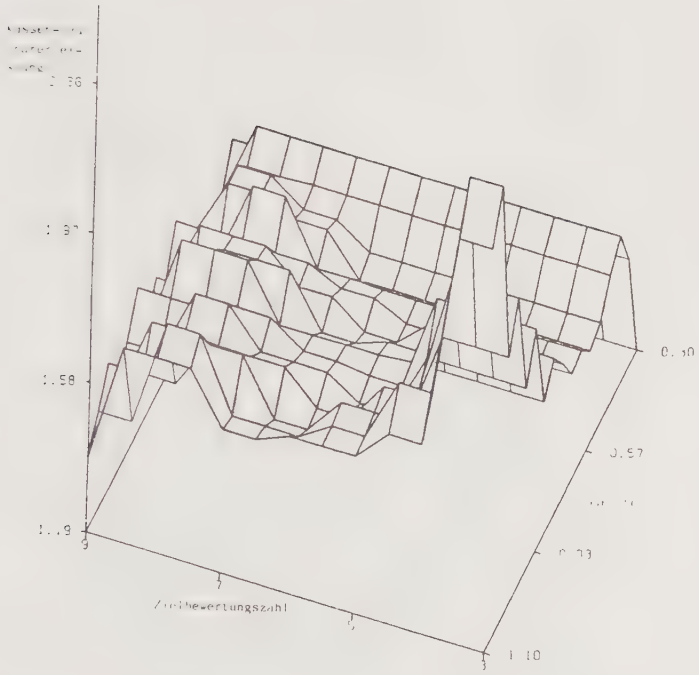

Abb. 6.XXIII: Kassen- zu Sparerleistung in der Niedrigzinsvariante des Tarifs D der MAINZ AG als Funktion der Sparrate und der Zielbewertungszahl

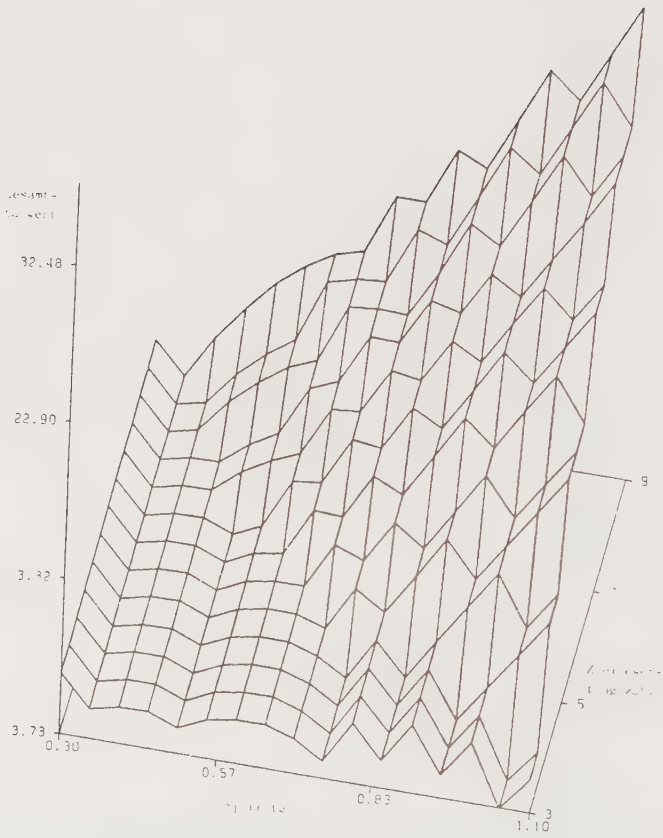

Abb. 6.XXIV: Gesamtbarwert in der Niedrigzinsvariante des Tarifs D der MAINZ AG als Funktion der Sparrate und der Zielbewertungszahl

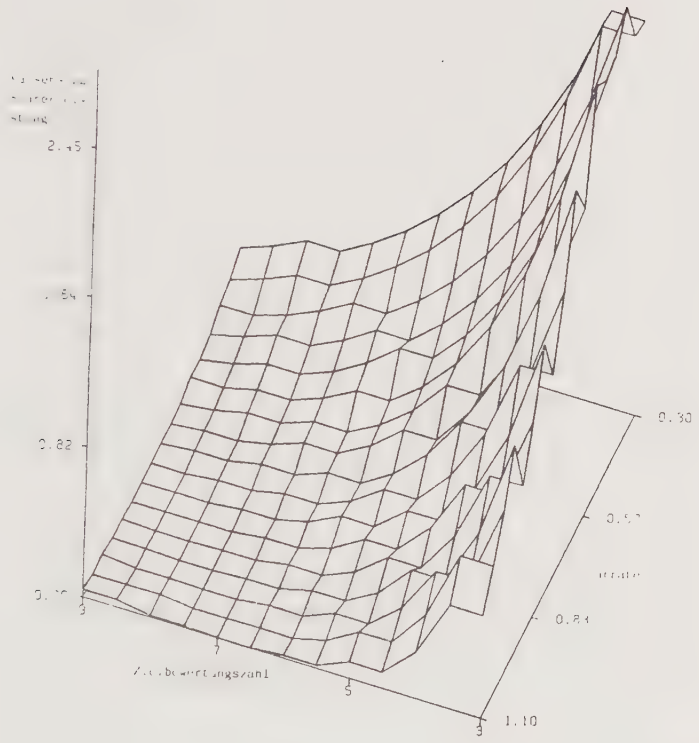

Abb. 6.XXV: Kassen- zu Sparerleistung im Hochzins-Standardtarif als Funktion der Sparrate und der Zielbewertungszahl

Abb. 6.XXVI: Gesamtbarwert im Hochzins-Standardtarif als Funktion der Sparrate und der Zielbewertungszahl

Der Belastungsgrad nimmt im Universaltarif als Funktion der Zielbewertungszahl nicht jenen typischen und gewollten Verlauf, wie er in Abbildung 6.XXV für den Hochzins-Standardtarif dargestellt ist. Dort führen höhere Zielbewertungszahlen grundsätzlich zu niedgrigeren Belastungsgraden und damit größerer Kollektivfreundlichkeit. Im Universaltarif zeigt die

Kassen- zu Sparerleistung unsystematisches Verhalten in Abhängigkeit von der Zielbewertungszahl. Bei keiner Sparrate zeigt sie durchgängig den von anderen Tarifen gewohnten fallenden Verlauf. Bei manchen Raten ist der Verlauf sogar durchgängig steigend, bei der Mehrzahl schwankt die Höhe jedoch unregelmäßig. Insgesamt ist die Variation des Belastungsgrades deutlich geringer als bei anderen Tarifen. Dieses untypische Tarifprofil weist darauf hin, daß eine Liquiditätssteuerung im Universaltarif schwierig, wenn nicht sogar unmöglich ist. Auf dieses Problem wird in 6.3.2.2 noch genauer eingegangen.

Weiterhin fällt an den Belastungsgraden auf, daß die Hochzinsvariante deutlich kollektivbelastender ist als die Niedrigzinsvariante. Das Niveau des Belastungsgrades ist in der Hochzinsvariante durchweg bis zu 0.5 höher. Dieser Effekt ist, wenn auch in abgeschwächter Form, von den Standardtarifen und den Schnelltarifen her bereits bekannt. Er beruht auf dem Unterschied des Darlehenszinssatzes. Wegen der fixierten Tilgungsbeiträge, die in Zins- und Tilgungsanteil aufgespalten werden, bedeutet ein höherer Darlehenszins immer eine überproportional verlängerte Tilgungsdauer und damit eine höhere Kassenleistung. Im Universaltarif stehen sich 3.5% Darlehenszins in der Niedrigzinsvariante und 6% in der Hochzinsvariante gegenüber. Wegen dieser ungewöhnlich hohen Differenz ist auch der Effekt auf die Belastungsgrade besonders stark.

Ein Vergleich der Barwert-Graphiken 6.XXII und 6.XXIV mit der entsprechenden Abbildung 6.XXVI für den Hochzins-Standardtarif machen deutlich, daß die Trends im Universaltarif die gleichen sind wie in anderen Tarifen. Trotz des unsystematischen Gefüges der Belastungsgrade zeigen sich beim Barwert für höhere Bewertungszahlen auch grundsätzlich höhere Werte. Das hier gegenüber dem Standardtarif deutlich erhöhte Niveau der gesamten Fläche ist im wesentlichen auf die längere Verweildauer von Sparern des Universaltarifs im Kollektiv zurückzuführen.

Für eine exemplarische Quantifizierung der oben dargestellten Effekte werden im folgenden Schnitte durch die Graphiken gelegt, indem z. B. nur die Kassen- zu Sparerleistungen der Sparer mit einer monatlichen Sparrate von 0,65% als Funktion der Zielbewertungszahl aufgetragen werden. Diese Schnitte sind für die Kassen- zu Sparerleistung und den Gesamtbarwert in der Hochzinsvariante und in der Niedrigzinsvariante des Universaltarifs sowie im Hochzins-Standardtarif in den Abbildungen 6.XXVII und 6.XXVIII dargestellt. Zusätzlich gibt Abbildung 6.XXIX

die jeweils zugehörigen Wartezeiten bis zur Zuteilung an.

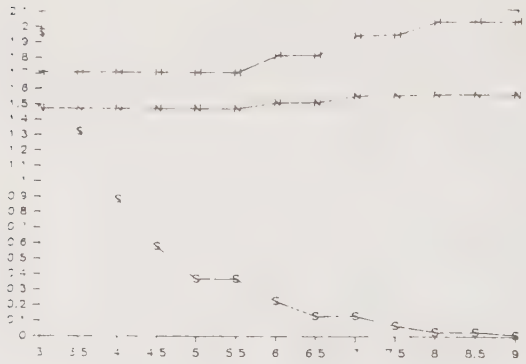

Abb. 6.XXVII: Kassen- zu Sparerleistung bei einer Sparrate von 0,65% monatlich.
H: Hochzinsvariante, N: Niedrigzinsvariante, S: Standardtarif

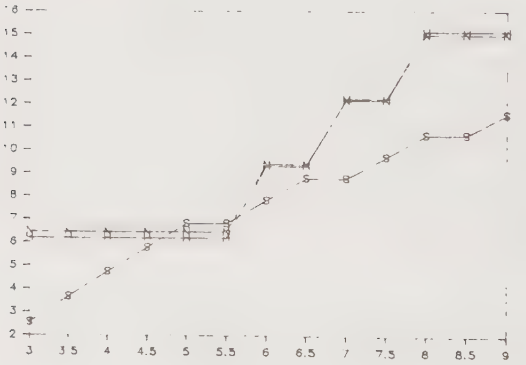

Abb. 6.XXVIII: Gesamtbarwert bei einer Sparrate von 0,65% monatlich.
H: Hochzinsvariante, N: Niedrigzinsvariante, S: Standardtarif

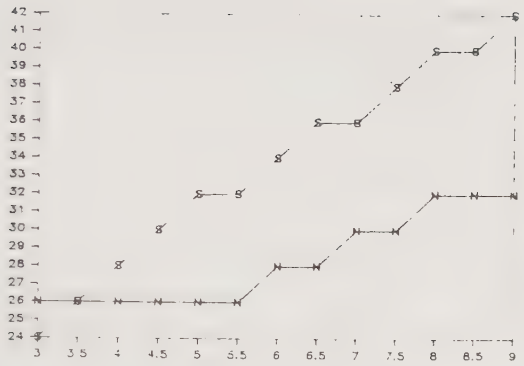

Abb. 6.XXIX: Wartezeit bis zur Zuteilung bei einer Sparrate von 0,65% monatlich.
H: Hochzinsvariante, N: Niedrigzinsvariante, S: Standardtarif

Abbildung 6.XXVII zeigt extrem deutlich die teilweise entgegengesetzten Wirkungen von Zielbewertungszahlenerhöhungen im Hochzins–Standardtarif und im Universaltarif. Im Standardtarif zeigt sich die gewünschte Liquiditätsentlastung, im Universaltarif bleibt der Belastungsgrad fast konstant (Niedrigzinsvariante) oder steigt sogar noch leicht an. Die Wartezeiten bis zur Zuteilung steigen im Standardtarif mit der Zielbewertungszahl fast linear an. Im Universaltarif reagieren sie bis zur BWZ 5.5 überhaupt nicht und steigen danach deutlich langsamer als im Standardtarif. Zusammen mit der fallenden Anfangstilgungsrate ergibt sich daraus gerade der Effekt der "automatischen Optimierung" beim Belastungsgrad. Der Barwert ist bei der unterstellten Gleichheit von Anlage- und Aufnahmezins im wesentlichen eine Funktion der Abwicklungsdauer. Im Standardtarif steigt der Barwert mit zunehmender Zielbewertungszahl langsamer an als im Universaltarif. Dies liegt daran, daß sich im Universaltarif an die verlängerte Sparphase auch eine verlängerte oder zumindest gleich lange Darlehensphase anschließt, während sich im Standardtarif mit zunehnender Ansparung der Darlehensanspruch und somit die Tilgungsdauer reduziert.

Die beschriebene und exemplarisch durchgeführte systematische Untersuchung kann auch für weitere interessante Gestaltungsparameter des Bausparers in der

Sparphase betrieben werden. So wäre es für spezielle Schnellspartarife sicher interessant, statt der monatlichen Sparrate die Höhe der Soforteinzahlung variieren zu lassen. Als Ergebnis erhielte man Profile des untersuchten Tarifs vergleichbar den Abbildungen 6.XXI - 6.XXVI für verschiedene Verhaltensmuster von Schnellsparern. Weiterhin können solche Tarifprofile in Abhängigkeit von der Höhe einer eventuellen Zuzahlung oder Auffüllung interessant sein.

6.3.2 Die Behandlung spezifischer Probleme

6.3.2.1 Die schnelle Entwicklung der Bewertungszahl

Die Wirkungsweise als Universaltarif erhält dieser Tarif durch eine flexible Bestimmung der Tilgungsraten. Als Kriterium dafür wird die Höhe der individuellen Bewertungszahl eines Bausparvertrages benutzt. Damit dieser Tarif auch tatsächlich als Universaltarif im Sinne des Wortes funktioniert, muß die Zuteilung von Bausparverträgen über die ganze Breite des Bewertungszahlenintervalles erfolgen, in dem die Höhe der Tilgungsbeiträge variiert.
Dementsprechend ist die Annuitätentabelle des Universaltarifs so gestaltet, daß ein Bausparvertrag, der mit einer regelmäßigen Rate von bis zu etwa 0,4% bespart wird, zu dem Zeitpunkt, an dem er den tariflichen Mindestanspargrad von 50% erreicht, gerade auch das obere Ende des Bewertungszahlenintervalls der Annuitätentabelle erreicht. Somit kommt der Bausparer in den Genuß der niedrigst möglichen Tilgungsraten. Eine regelmäßige Ansparung mit etwa 0,8% monatlich oder mehr führt dagegen bei Erreichung der Mindestansparung von 50% zu einer Bewertungszahl von 5 am unteren Ende des Bewertungszahlenintervalls.

Um tatsächlich alle Möglichkeiten der Tilgungsraten ausschöpfen zu können, muß die Zielbewertungszahl des Bausparkollektivs unterhalb der unteren Grenze des Bewertungszahlenintervalls der Annuitätentabelle liegen. Das bedeutet implizit, daß der überwiegende Teil der Zuteilungen bei Erreichen des Anspargrades von 50% erfolgt und nicht durch die Zielbewertungszahl beschränkt wird. Die schnelle Entwicklung der individuellen Bewertungszahl ist also notwendig, um den gewollten Effekt zu erreichen, daß bestimmte Ansparverhalten im Normalfall auch bestimmte Tilgungsverhalten nach sich ziehen.

6.3.2.2 Die reduzierte Funktion der Zielbewertungszahl

Als Konsequenz für die Bausparkasse ergibt sich aus der geschilderten Konstruktion des Tarifs, daß der größte Teil der Zuteilungen nicht über die Zielbewertungszahl abläuft. Sparer mit niedrigen Ansparraten werden völlig unabhängig von der Zielbewertungszahl zugeteilt, da sie diese bei Erreichen der Mindestansparung schon lange aufweisen. Das bedeutet umgekehrt auch, daß eine Veränderung der Zielbewertungszahl durch die Bausparkasse nur einen geringen Teil der Bausparer betrifft.

Bei den herkömmlichen Tarifen wirkt eine Erhöhung der Zielbewertungszahl meist gleichmäßig auf alle Bausparer, unabhängig von ihrem Ansparverhalten. Durch eine moderate Erhöhung der Zielbewertungszahl kann die Bausparkasse also den Zuteilungsdruck stark mindern, da alle Sparerschichten des Kollektivs betroffen werden. Im Universaltarif bedeutet eine Erhöhung der Zielbewertungszahl lediglich für die Schichten eine Verlängerung der Wartezeit bis zur Zuteilung, die am schnellsten ansparen. Zuerst werden die Schnellsparerschichten betroffen, danach die Schichten mit hoher regelmäßiger Ansparung.

Eine Erhöhung der Zielbewertungszahl hat im Universaltarif möglicherweise noch eine weitere Konsequenz. Sobald die Zielbewertungszahl über die untere Grenze des Bewertungszahlenintervalls der Annuitätentabelle angehoben wird, kann der entsprechende Teil der niedrigsten Tilgungsraten bei der Zuteilung nicht mehr zum Zuge kommen, da keine Zuteilung unter der Zielbewertungszahl ausgesprochen werden kann. Je weiter die Zielbewertungszahl aus Liquiditätsgründen steigen muß, umso stärker nimmt die "Universalität" des Tarifs ab. Steigt die Zielbewertungszahl im Extremfall bis zur oberen Grenze des Bewertungszahlenintervalls an, so ist aus dem Universaltarif ein gewöhnlicher Tarif mit festen Tilgungsbeiträgen geworden.

Hinzu kommt noch der in 6.3.1 dargestellte Effekt der impliziten Optimierung durch den Universaltarif. Durch höhere Zielbewertungszahlen werden bei einigen Sparerschichten zwar Wartezeitverlängerungen erzwungen. Durch die Annuitätentabelle erhalten diese Schichten dafür aber niedrigere Tilgungsraten, so daß der entlastende Effekt der Zielbewerungszahlenerhöhung auf die Liquiditätslage deutlich geringer ausfällt als in herkömmlichen Tarifen, unter Umständen ist der langfristige Liquiditätseffekt sogar negativ. Der Universaltarif kann also nur solange als solcher fungieren, wie die Zielbewertungszahl keine wichtige Rolle spielt. Im Grunde verträgt sich die Konstruktion dieses Tarifs nicht mit dem Konzept der

Zielbewertungszahl. Zum einen wirkt sie im Universaltarif nur sehr eingeschränkt auf die Liquidität des Kollektivs und zum anderen hebt sie das Prinzip des Universaltarifs sukzessiv auf, wenn sie sich im relevanten Bereich dieses Tarifs befindet. In der Bausparpraxis ist die Zielbewertungszahl jedoch das wichtigste Instrument der Bausparkasse zur Liquiditätssteuerung im Kollektiv. Aus diesem Grund muß die vorliegende Konstruktion eines Universaltarifs zumindest als problematisch eingestuft werden.

Im folgenden werden die Ergebnisse von einigen Simulationsrechnungen dargestellt, die das beschriebene Problem der nur noch eingeschränkt wirksamen Zielbewertungszahl verdeutlichen. Es wurde ein Kollektiv aus acht Sparerschichten mit verschiedenen Ansparverhalten zusammengestellt. Dabei handelt es sich um Ratensparer mit monatlichen Raten von 0.3%, 0.4%, ... 0.9% und einen 50%-Soforteinzahler, die mit gleichen Anteilen von jeweils 12,5% am konstanten Neugeschäft der Simulationen beteiligt sind. Dieses Kollektiv wurde nun unter verschiedenen Rahmenbedingungen alternativ im Hochzins-Standardtarif bzw. im Universaltarif der MAINZ AG abgewickelt. In der folgenden Tabelle 6.XXX sind die Anlegungsgrade des statischen Beharrungszustandes dieses Kollektivs bei verschiedenen Zielbewertungszahlen zusammengetragen.

	Anlegungsgrad im	
BWZ	Hochzins-Standardtarif	Universaltarif
2	2.67	1.46
3	1.72	1.46
3.3	1.49	1.46
3.5	1.33	1.45
4	1.00	1.45
5	0.60	1.42

Tabelle 6.XXX: Anlegungsgrade des Hochzins-Standardtarifs und des Universaltarifs bei verschiedenen Zielbewertungszahlen

Im Zielbewertungszahlenbereich von 2 bis 5 bleibt der Anlegungsgrad im Universaltarif-Kollektiv nahezu unverändert. Aus der Schichtenstatistik des Simulationsmodells kann entnommen werden, daß lediglich die Ratensparerschichten mit 0,8% und 0,9% Ansparung und die Schnellsparerschicht überhaupt Veränderungen aufweisen. Dazu sind in der Tabelle 6.XXXI die Belastungsgrade und die mittleren Wartezeiten der einbezogenen Schichten dargestellt.

Schicht	BWZ 2 K/S	BWZ 2 tz	BWZ 5 K/S	BWZ 5 tz
Ratensparer 3%	1.17	51.5	1.17	51.5
Ratensparer 4%	1.51	40.0	1.51	40.0
Ratensparer 5%	1.45	33.0	1.45	33.0
Ratensparer 6%	1.42	28.0	1.42	28.0
Ratensparer 7%	1.44	24.5	1.44	24.5
Ratensparer 8%	1.54	21.5	1.47	22.5
Ratensparer 9%	1.66	19.5	1.48	21.5
50%-Soforteinzahler	1.90	9.5	1.51	11.5

Tabelle 6.XXXI: Belastungsgrade und Wartezeiten bis zur Zuteilung im Universaltarif

Die letzten drei Schichten müssen teilweise empfindliche Wartezeitverlängerungen in Kauf nehmen, während alle anderen Schichten unberührt bleiben. Im krassen Gegensatz zum Universaltarif variieren die Anlegungsgrade des Kollektivs mit dem Hochzins-Standardtarif zwischen solch extremen Werten wie 2.67 bei der Zielbewertungszahl 2 und 0.60 bei BWZ 5. In diesem Kollektiv sind alle Schichten von den höheren Bewertungszahlen betroffen, wie aus Tabelle 6.XXXII ersichtlich ist.

Schicht	BWZ 2 K/S	BWZ 2 tz	BWZ 5 K/S	BWZ 5 tz
Ratensparer 3%	1.82	41.5	1.21	45.5
Ratensparer 4%	2.23	32.5	0.90	39.5
Ratensparer 5%	2.74	26.5	0.66	35.5
Ratensparer 6%	3.19	22.5	0.49	32.5
Ratensparer 7%	3.69	19.5	0.33	30.5
Ratensparer 8%	3.09	18.5	0.24	28.5
Ratensparer 9%	2.71	17.5	0.19	26.5
50%-Soforteinzahler	2.89	7.5	0.77	19.5

Tabelle 6.XXXII: Belastungsgrade und Wartezeiten bis zur Zuteilung im Hochzins-Standardtarif

Auch im Standardtarif sind schneller ansparende Schichten stärker von einer höheren Zielbewertungszahl betroffen als langsam sparende Schichten. Der Vergleich der Tabellen 6.XXXI und 6.XXXII sowie die Anlegungsgrade aus Tabelle 6.XXX machen die geringe Abhängigkeit des Universaltarifs von der Zielbewertungszahl

augenfällig. Eine ernsthafte Reaktion der Liquiditätslage auf Erhöhungen der Zielbewertungszahl sind erst in einem Bereich zu verzeichnen, in dem Sparer in den Standardtarifen ihre Bausparsumme schon fast voll ansparen müssen. Damit ist der Universaltarif aus der Liquiditätssteuerung eines gemischten Kollektivs über die Zielbewertungszahl praktisch herausgenommen. Liquiditätsmäßig bedingte Verlängerungen der Wartezeit bis zur Zuteilung wird es in solchen gemischten Kollektiven für die Bausparer des Universaltarifs daher kaum geben.

Diese Erkenntnisse legen es eigentlich zwingend nahe, Universaltarife nach dem Muster der MAINZ AG in getrennten Zuteilungsmassen zu führen, so daß die Zielbewertungszahlen für die Standardtarife getrennt vom Universaltarif ermittelt werden. Situationen, in denen Bausparer eines Tarifs von anderen Tarifen so stark subventioniert werden, wie es in einem gemischten Kollektiv aus Standardtarif und Universaltarif bereits bei der Zielbewertungszahl 5 der Fall wäre, sollten in der Bausparpraxis aus Gerechtigkeitsgründen nicht zugelassen werden.

6.3.2.3 Das Auffüller-Problem

Aus der schnellen Entwicklung der individuellen Bewertungszahlen ergibt sich für einen einzelnen Bausparvertrag die Situation, daß die kollektive Zielbewertungszahl bereits lange vor der Zuteilung erreicht wird. Die einschneidende Bedingung für die Zielbewertungszahl ist im Universaltarif meist nicht die Zielbewertungszahl, sondern die Mindestansparung von 50% der Vertragssumme. Für den Bausparer bedeutet dies die Möglichkeit, daß er die Zuteilung jederzeit durch eine Auffüllung seines Bausparguthabens bis zur Mindestansparung erzwingen kann. Im Umkehrschluß bedeutet dies für die Bausparkasse, daß ein Kollektiv mit einem größeren Anteil an Ratensparern mit mittleren bis niedrigen Raten stets ein erhebliches Kontingent an potentiellen Auffüllern beherbergt, die ihre Ansprüche auf Zuteilung jederzeit geltend machen können, ohne daß die Bausparkasse dies verhindern oder steuern kann. In herkömmlichen Bauspartarifen kann die Bausparkasse auf solchen Zuteilungsdruck mit Erhöhung der Zielbewertungszahl reagieren. Da Ratensparer diese im Universaltarif schon ziemlich bald erreichen und überschreiten, hilft dieses Mittel hier nur wenig.

Dieses Phänomen ermöglicht für die Bausparer eine erhebliche Ausnutzung des Bausparkollektivs. Die in jedem Bausparkollektiv ohnehin vorhandenen Subventionierungseffekte zwischen verschiedenen Sparerschichten (vgl. 6.2.2)

können von einzelnen Sparern im Universaltarif zu ihren Gunsten besonders forciert werden. So können Sparer in kurzen Ansparzeiten durch niedrige Sparbeiträge die Zielbewertungszahl erreichen. Durch eine Auffüllung auf 50% der Bausparsumme kann die Sparphase sofort beendet werden. Durch eine solche Verkürzung der Sparphase bei Erhaltung des Anspruchs auf das fixierte Bauspardarlehen kann ein Bausparer seine Kassen- zu Sparerleistung stark zu ungunsten des Bausparkollektivs beeinflussen.

Im Bewertungsverfahren des untersuchten Universaltarifs, dem Saldensummenverfahren, gibt die Bewertungszahl eines Bausparvertrages bei Einzahlungen am Periodenanfang bis auf einen konstanten Faktor gerade die Sparerleistung dieses Vertrages an (vgl. Formeln (3.19), (3.20)). Für den Bausparer ist es bei Kenntnis der Zielbewertungszahl daher einfach, einen in seinem Sinne optimalen Sparprozeß zu verwirklichen. Er muß lediglich dafür sorgen, daß sein Bausparvertrag im Zeitpunkt der Zuteilung genau die Zielbewertungszahl aufweist. Gelingt ihm dies nach einem vorher beliebig gestalteten Sparprozeß etwa durch eine Auffüllung, so hat er die Zuteilung mit der kleinstmöglichen Kapitalbindung in der Sparphase erlangt. Unterstellt man für die Darlehensphase Regeltilgungen, so kann die Kassenleistung bereits aus der Zielbewertungszahl berechnet werden, da die Höhe des Darlehensanspruchs unabhängig vom Anspargrad bei Zuteilung auf 50% der Vertragssumme fixiert ist und die Höhe der Tilgungsraten eben aufgrund der Zielbewertungszahl festgelegt werden. So kann also für jede Zielbewertungszahl BWZ der für den Bausparer günstigste, also der höchste, Belastungsgrad K/S^{max} berechnet werden, der durch geeignete Auffüllung und Zuzahlung erreichbar ist:

$$K/S^{max}(BWZ) = \frac{KL(BWZ)}{SL(BWZ)} = \frac{KL(BWZ)}{\text{const} \cdot BWZ}.$$

In der folgenden Tabelle 6.XXXIII ist diese für das Bausparkollektiv ungünstigst mögliche Kassen- zu Sparerleistung in der Hochzinsvariante des Universaltarifs für verschiedene Bewertungszahlen-Niveaus zusammengestellt.

BWZ	max K/S
1	52.2
1.5	11.6
2	6.3
2.5	4.6
3	3.4
3.5	2.8
4	2.2
4.5	1.9
5	1.8

Tabelle 6.XXXIII: Maximal mögliche Belastungsgrade im Universaltarif bei verschiedenen *BWZ*-Niveaus

Belastungsgrade von 1.8 bis 2.2, die bei Zielbewertungszahlen von 4 und mehr durch optimales Ansparen erreicht werden können, sind durchaus im Bereich des für die Hochzinsvariante des Universaltarifs durchgängig Normalen. Die bei niedrigeren Zielbewertungszahlen erreichbaren Belastungsgrade sind jedoch alarmierend hoch. Dies gilt besonders, wenn man in Betracht zieht, daß Größenordnungen der Zielbewertungszahl von 2 bis 3 durchaus realistisch sind.

Die für die Bausparkasse und das Bausparkollektiv schwerwiegendere Problematik des ständig vorhandenen Auffüller-Potentials liegt in der Möglichkeit dieser Bausparer, ihre Zuteilung zu beliebigen Zeitpunkten zu erzwingen. Es besteht dadurch die Gefahr, daß viele Bausparer gleichzeitig von dieser Möglichkeit Gebrauch machen und das Bausparkollektiv durch ihre massierten Zuteilungsanforderungen kurzfristig vor erhebliche Liquiditätsprobleme stellen. Die Bausparkasse kann also zur Refinanzierung von Bauspardarlehen durch Fremdmittelaufnahme gezwungen sein.

Die besondere Gefahr dieses Zusammenhangs liegt darin, daß die Bausparkasse gerade immer dann mit erhöhtem Gebrauch dieser Möglichkeit rechnen muß, wenn die Aufnahme von Fremdgeld besonders teuer ist. Denn Bauspardarlehen mit ihrem festen, vergleichsweise niedrigen Darlehenszinssatz werden zur Finanzierung von Baumaßnahmen naturgemäß verstärkt nachgefragt, wenn die Kosten anderer Finanzierungsmittel hoch sind. Bei hohem Kapitalmarktzins werden also besonders viele Bausparer von ihrer Auffüllungsmöglichkeit Gebrauch machen, um

ihr Bauspardarlehen als Alternative beispielsweise zu einer wesentlich höher verzinslichen Hypothek einsetzen zu können.

Die Konsequenzen solchen prozyklischen Verhaltens von Bausparern auf die Liquiditäts- und Ertragslage einer Bausparkasse werden im folgenden dargestellt. Dazu werden zwei Bausparkollektive im Universaltarif und im Hochzins-Standardtarif betrachtet, die einen hohen Prozentsatz an Sparern enthalten, die abhängig von der Höhe des Marktzinssatzes bereit sind, 25% ihrer Vertragssumme als Auffüllung zu leisten, falls sie dadurch ihre Zuteilung erlangen können. Dazu wird die Schicht der Regelsparer in zehn gleich große Teilschichten aufgespalten, deren kritische Zinssätze für die Auffüllung von 3% bis 12% variieren. Dadurch wird erreicht, daß der Teil eines Neugeschäftsjahrganges, der in einem Quartal zur Auffüllung bereit ist, mit dem Zinsniveau steigt. In der folgenden Tabelle 6.XXXIV ist dieser Anteil für die betrachteten Marktzinssätze zusammengestellt.

Marktzinssatz	Anteil der zur Auffuellung bereiten Sparer eines Jahrgangs
3 %	6 %
4 %	12 %
5 %	18 %
6 %	24 %
7 %	30 %
8 %	36 %
9 %	42 %
10 %	48 %
11 %	54 %
12 %	60 %

Tabelle 6.XXXIV: Auffüllungsbereitschaft in Abhängigkeit vom Marktzins

Die beiden Kollektive werden bei einem Marktzinsniveau von 7% solange simuliert, bis sie ihren statischen Beharrungszustand bei Anlegungsgraden von 0,8 bzw. 0,84 erreichen. Danach wird bei konstantem Neugeschäft und festgehaltener Zielbewertungszahl der Marktzins phasenweise variiert. Dadurch erfolgen gemäß Tabelle 6.XXXIV mehr bzw. weniger Auffüllungen.

Für die zeitliche Entwicklung des Marktzinses werden zwei Alternativen berücksichtigt. Zinsentwicklung 1 unterstellt zunächst ein Ansteigen des Zinses von 7% auf 12% innerhalb von 2,5 Jahren. Die Hochzinsphase hält danach noch

3 Jahre an. Darauf sinkt der Zins in 4,5 Jahren auf 3% ab, behält diesen Wert für 3 Jahre bei und steigt anschließend wieder auf den Ausgangswert von 7% an. Zinsentwicklung 2 stellt den inversen Verlauf zu 1 dar. Die Niedrigzinsphase mit 3% Marktzins geht der Hochzinsphase hier voraus.

Die Abbildungen 6.XXXV und 6.XXXVI enthalten die zeitliche Entwicklung der Anlegungsgrade der beiden Kollektive für die Zinsentwicklungen 1 (Abbildung 6.XXXV) und 2 (Abbildung 6.XXXVI).

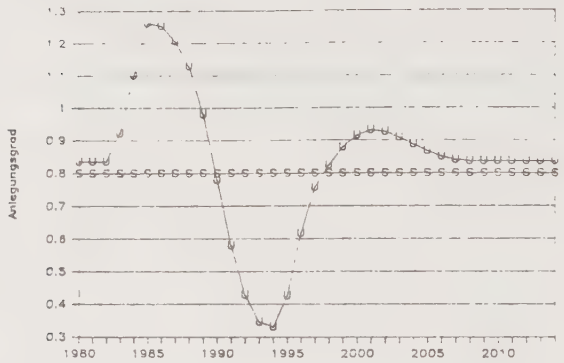

Abb. 6.XXXV: Anlegungsgrade im Universaltarif (U) und im Hochzins–Standardtarif (S) bei Zinsentwicklung 1

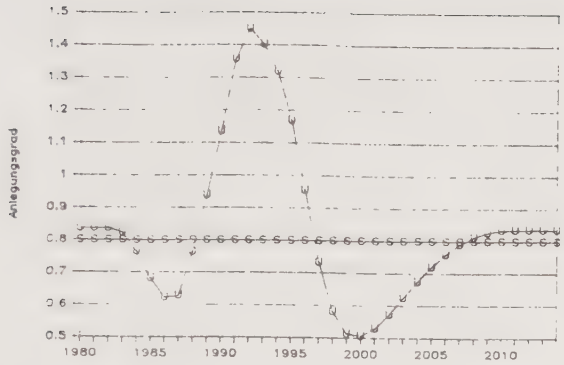

Abb. 6.XXXVI: Anlegungsgrade im Universaltarif (U) und im Hochzins-Standardtarif (S) bei Zinsentwicklung 2

Im Hochzins-Standardtarif führt die Auffüllbereitschaft von maximal 60% jedes Abschlußjahrgangs zu keiner einzigen Auffüllung, da die 0,4%-Ratensparer für die Zuteilung nicht durch ihre Mindestansparung von 40% der Vertragssumme, sondern durch die Zielbewertungszahl beschränkt werden. Im Universaltarif stellt sich bei Zinsentwicklung 1 sofort eine heftige Reaktion nach oben ein. Der Anlegungsgrad steigt innerhalb von 3 Jahren von 0.84 auf 1.26 an. Dieses Maximum fällt mit dem Erreichen des höchsten Zinssatzes von 12% zusammen. Mit der Abnahme des Zinssatzes fällt auch der Anlegungsgrad auf ein lokales Minimum von 0,33, das wiederum zeitgleich mit dem Erreichen des niedrigsten Zinssatzes von 3% angenommen wird. Nachdem der Marktzins sein Ruheniveau von 7% wieder erreicht hat, pendelt sich auch der Anlegungsgrad wieder auf seinem stationären Niveau von 0.84 ein.

Bei Zinsentwicklung 2 nimmt der Anlegungsgrad im Prinzip den inversen Verlauf wie unter Zinsentwicklung 1, jedoch sind die Extremwerte der Entwicklung anders ausgeprägt. Das anfängliche Minimum liegt mit 0.62 nur 0.22 unter dem stationären Niveau, während bei Zinsentwicklung 1 ein Anstieg des Anlegungsgrades um 0.42 zu verzeichnen war. Die nun folgenden Extremwerte (Maximum bei 1.45, Minimum bei 0.50) liegen jedoch weiter vom stationären Wert entfernt als die

entsprechenden Punkte bei Zinsentwicklung 1.

Die Abbildungen 6.XXXVII bis 6.XL geben die Entwicklungen der Zinsspanne und des Zinsüberschusses wieder, die sich durch die Zinsentwicklungen 1 und 2 ergeben.

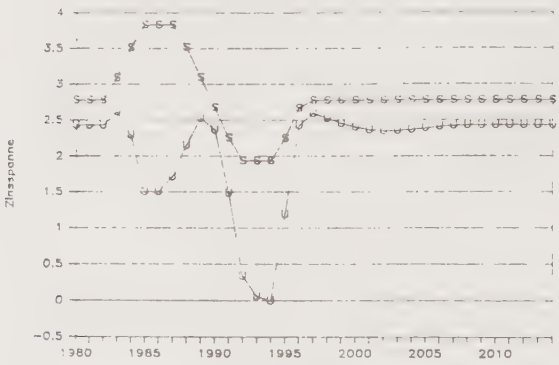

Abb. 6.XXXVII: Zinsspanne im Universaltarif (U) und im Standardtarif (S) bei Zinsentwicklung 1

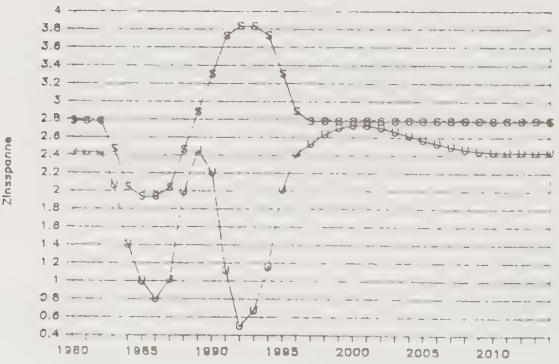

Abb. 6.XXXVIII: Zinsspanne im Universaltarif (U) und im Standardtarif (S) bei Zinsentwicklung 2

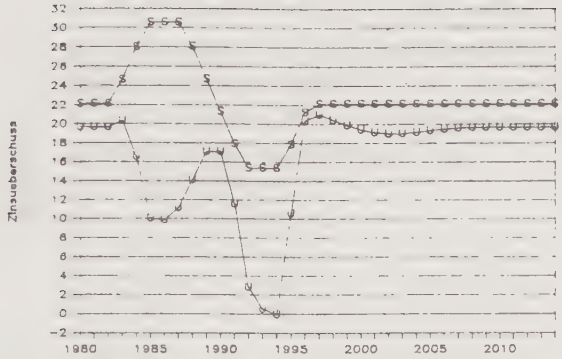

Abb. 6.XXXIX: Zinsüberschuß im Universaltarif (U) und im Standardtarif (S) bei Zinsentwicklung 1

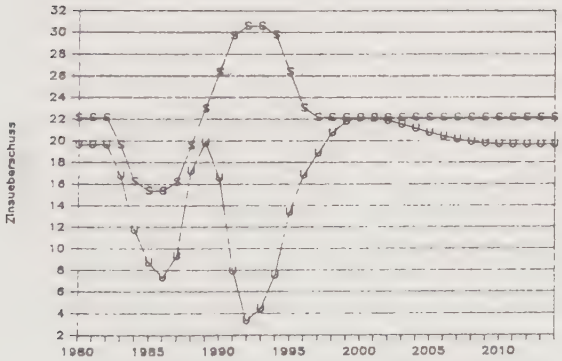

Abb. 6.XL: Zinsüberschuß im Universaltarif (U) und im Standardtarif (S) bei Zinsentwicklung 2

Die Kurven für den Hochzins–Standardtarif erklären sich daraus, daß in allen Jahren die gleiche, nicht in Bauspardarlehen angelegte Zuteilungsmasse zu

verschiedenen Marktzinssätzen angelegt wird. Daher folgen die Zinsspanne und der Zinsüberschuß völlig dem Verlauf der jeweiligen Zinsentwicklung.

Im Universaltarif ergeben sich deutlich abweichende Verläufe. Bei Zinsentwicklung 1 überlagern sich anfangs zwei entgegengesetzte Effekte. Auf der einen Seite wird die anlegbare Masse durch den steigenden Anlegungsgrad geringer. Der dafür zu erzielende Zinssatz ist jedoch höher. Der Liquiditätseffekt dominiert insgesamt stark, so daß Zinsspanne und Zinsüberschuß erhebliche Einbrüche aufweisen. In der folgenden Niedrigzinsphase ist es zum Nachteil der Bausparkasse umgekehrt. Die erhebliche freie Masse kann lediglich zu Zinssätzen angelegt werden, die gerade die aufzubringenden Guthabenszinsen abdecken. Daher kann mit dieser Masse kaum Gewinn erwirtschaftet werden. Zinsspanne und Zinsüberschuß weisen deshalb ein weiteres lokales Minimum auf.

Für die Zinsentwicklung 2 ergibt sich ein ähnlicher Verlauf der Ertragsgrößen. Insgesamt bleiben Zinsspanne und Zinsüberschuß bei beiden Zinsentwicklungen fast während des gesamten Simulationszeitraums unter ihren stationären Niveaus. Das bedeutet, daß Schwankungen des Zinsniveaus bei der unterstellten Auffüllbereitschaft im Universaltarif immer zu Ertragseinbußen führen. Die Tragweite dieses Auffüllereffekts wird durch die zeitweise fast auf 0 abgesunkenen Ertragsgrößen besonders deutlich.

6.4 Vorbereitung und Unterstützung geschäftspolitischer Entscheidungen

Die Geschäftspolitik von Unternehmen kann zum einen durch gezielte Maßnahmen unter Umständen bestimmte gewollte Effekte hervorrufen. Dies geschieht entweder durch die Maßnahmen selbst oder mittelbar durch die bewußt provozierten Reaktionen der Adressaten der Maßnahmen. Zum anderen kann ein Unternehmen durch externe Vorgänge gezwungen sein, irgendwelche Maßnahmen zur Abwendung daraus resultierender Gefahren zu ergreifen. Als Beispiel für den ersten Komplex kann aus dem Bausparsektor etwa eine bewußte Forcierung des Vor- und Zwischenfinanzierungsgeschäfts zur Erweiterung des Geschäftsbereichs angeführt werden. In den zweiten Komplex fällt z. B. die Einführung neuer Bauspartarife zum Ansprechen neuer Kundenschichten als Reaktion auf rückläufiges Neugeschäft und/ oder bereits erfolgte Einführung neuer Tarife durch

die Konkurrenz.

Geschäftspolitische Maßnahmen haben neben teilweise erwünschten kurz- und mittelfristigen Effekten auch oft langfristige Auswirkungen. Dies gilt für den Bausparsektor in verstärktem Maß , da der Hauptteil des Geschäfts, nämlich die Abwicklung von Bausparverträgen, langfristiger Natur ist. Aus diesem Grund müssen beabsichtigte geschäftspolitische Maßnahmen von Bausparkassen auf den gesamten zeitlichen Ablauf ihrer Wirkungen auf das Bausparkollektiv hin untersucht werden. Für solche Untersuchungen ist besonders das Simulationsmodell in Verbindung mit der optimierten Bestandsanpassung geeignet. Hiermit lassen sich detaillierte Wirkungsstrukturen erfassen.

Simulationsrechnungen bezüglich bestehender Bausparkollektive können auch noch eine andere wichtige Funktion übernehmen. Durch die Simulation denkbarer Szenarien für die zukünftige Entwicklung kann ein geschäftspolitischer Handlungsbedarf frühzeitig erkannt werden. Auf diese Weise bleibt hinreichend Zeit, mögliche Handlungsalternativen gründlich zu untersuchen, so daß die Maßnahmen nicht überstürzt durchgeführt werden müssen.

In 6.4.1 wird an einer hypothetischen Bausparkasse beispielhaft demonstriert, wie konkrete aktuelle Probleme mit dem Simulationsmodell bearbeitet werden können. Hierbei wird gezeigt, daß die stärksten Effekte auf Liquidität und Ertrag eines Bausparkollektivs vom Zuteilungsrhythmus ausgehen. Da dieser von der Bewertungszahlenentwicklung der Verträge und somit von ihrer Besparung abhängt, sind der kollektive Spargeldeingang und der Anteil der Schnellsparer insbesondere wesentliche Determinanten der Entwicklung. Wegen der dominierenden Rolle des Zuteilungsrhythmus sind die kurzfristigen Wirkungen von Änderungen im Neugeschäft nur gering. Erst bei Zuteilung der geänderten Schichten bzw. der substituierten Schichten sind stärkere Effekte vorhanden. Für die Langzeittarife wird gezeigt, daß der Zinsüberschuß trotz reduzierter Zinsspanne wegen ihrer bilanzverlängernden Wirkung höher sein kann als in anderen Tarifen.

In 6.4.2 werden zu einem aktuellen Problem der Bausparpraxis zwei Verfahrensansätze vorgestellt. Es handelt sich dabei um die Berechnung einer bauspartechnischen Rückstellung zum Ausgleich der wartezeitverlängernden Wirkungen von Neugeschäftsrückgängen. Der unternehmensorientierte Ansatz prognostiziert auf der Basis eines optimierten Bestandsanpassungsmodells die zukünftige Liquiditäts- und Ertragsentwicklung einer konkreten Bausparkasse.

Daraus läßt sich ein eventueller Rückstellungsbedarf relativ genau quantifizieren. Der generelle Ansatz berechnet den Rückstellungsbedarf allgemein auf der Basis einer Analyse am Beharrungszustand. Es wird dabei zu zeigen sein, daß unter dieser Voraussetzung die Höhe der notwendigen Schwankungsrückstellung R in Prozent der Bauspareinlagen BSE zur Höhe y eines Neugeschäftseinbruches proportional ist und im übrigen als affin lineare Funktion des Marktzinssatzes MZ für Fremdkapitalaufnahme darstellbar ist:

$$R = (100 - y) \cdot \frac{BSE}{100} \cdot (\gamma + \delta \cdot MZ) .$$

6.4.1 Tarif- und Kollektivsteuerung

In diesem Abschnitt wird eine hypothetische Bausparkasse unterstellt, die die typischen Entwicklungsmerkmale des Bausparmarktes wiederspiegelt. So sind z. B. die branchenweiten Neugeschäftseinbrüche in den Jahren 1967, 1974 und 1981/82 berücksichtigt. Ab dem Jahr 1977 wird neben dem Hochzins-Standardtarif auch der Niedrigzins-Standardtarif geführt, der einen durchnittlichen Anteil von ca. 25% am Neugeschäft besitzt. Ab 1982 wurden zusätzlich zwei Schnelltarife (Hochzins- und Niedrigzinsvariante) und ein Langzeittarif mit Optionsmöglichkeit auf einen 1,5% -igen Bonuszins eingeführt. Diese drei neuen Tarife haben entsprechend der realen Entwicklung im Bausparsektor zusammen nur einen relativ geringen Neugeschäftsanteil von etwa 4% . Trotz kontinuierlich erhöhter Zielbewertungszahlen steigt der Anlegungsgrad in den Jahren bis 1983 auf einen Wert von 0.82.

Für diese hypothetische Bausparkasse wurde mit den in Teil 5 vorgestellten Verfahren ein optimiertes Bestandsanpassungsmodell entwickelt, das eine gute Anpassung der kollektiven Bestände mit durchschnittlichen prozentualen Abweichungen unter 3% in den letzten 15 Jahren liefert. Dieses Bestandsanpassungsmodell wird im folgenden zu Alternativrechnungen benutzt, in denen denkbare Zukunfts-Szenarien durchgespielt werden.

Als "Normalprognose" der zukünftigen Kollektiventwicklung wird eine Simulationsrechnung verstanden, die für die Zukunft eine vom heutigen Standpunkt möglichst realistische Entwicklung des Neugeschäfts unterstellt. Angesichts der Entwicklung der letzten Jahre und der stark reduzierten staatlichen Förderung kann mit einem langfristigen Wachstum kaum gerechnet werden. Daher wird bezüglich

des Neugeschäftsvolumens angenommen, daß es auf dem Niveau von 1983 konstant bleibt. Für die Zusammensetzung des Neugeschäfts wird angenommen, daß der Anteil der neuen Tarife auf insgesamt 12% steigt. In den einzelnen Tarifen werden besonders die Sparerschichten berücksichtigt, für die die Tarife speziell konstruiert sind. Die Neugeschäftszusammensetzung wird in allen zukünftigen Jahren als konstant vorausgesetzt.

Man muß sich hierbei im klaren darüber sein, daß die Annahme einer unveränderten Neugeschäftsstruktur stark idealisierend ist. Die Bestandsanpassung erbrachte erheblich schwankende Neugeschäftsanteile der einzelnen Sparerschichten in der Vergangenheit. Es gibt keinen Grund für die Annahme, daß solche Schwankungen plötzlich aufhören sollten. Die Schwierigkeit, differenziertere Prognosen über künftige Neugeschäftszusammensetzungen abzugeben, liegt darin, daß für die jährlichen Änderungen der Zusammensetzung in der Vergangenheit kein System erkennbar ist. Partielle Erklärungen lassen sich aufgrund bestimmter Einflußfaktoren der Vergangenheit finden. Diese helfen für die Zukunft jedoch nicht, weil sie auf mehr oder weniger unsystematischen oder nur im Rahmen umfassender ökonomischer Modelle erklärbaren Zusammenhängen basieren. Aus diesem Grund erscheint eine zukünftig unveränderte Neugeschäftszusammensetzung mangels besserer Information als die sinnvollste Definition für eine "Normalprognose".

In der folgenden Tabelle 6.XLI sind die prozentualen Anteile der fünf einbezogenen Tarife am Neugeschäft der Normalprognose angegeben. In Tabelle 6.XLII finden sich die Anteile der wichtigsten Gruppen von Sparerschichten in den einzelnen Tarifen.

Tarif	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
Anteil	67%	21%	2%	3%	7%

Tabelle 6.XLI: Normalprognose: prozentuale Anteile der Tarife am Neugeschäft

	I	II	III	IV	V
Regelsparer	16.7	19.0	4.8	3.8	37.1
Unterregelsparer	9.7	9.0	0.4	0.4	10.0
Ueberregelsparer	15.9	12.0	20.0	14.0	11.4
Zuzahler	17.7	15.0	24.0	16.0	10.0
Soforteinzahler	8.0	16.0	20.0	44.0	0.0
Wartezeitverkürzende Faktoren: Darlehensverzichter, Kündiger, Fortsetzer	32.0	22.0	26.8	18.6	25.0
Sonstige	0.0	7.0	4.0	3.2	5.7

Tabelle 6.XLII: Normalprognose: prozentuale Anteile der wichtigsten Sparerschichten am Neugeschäft der verschiedenen Tarife

Als Alternativen für die zukünftige Entwicklung werden verschiedene Szenarien unterstellt, die im folgenden beschrieben werden.

Variante A: Konstantes Neugeschäft, ohne neue Tarife. Für die Zukunft wird vorausgesetzt, daß volumenmäßig das gleiche Neugeschäft wie 1983 realisiert werden kann. Dieses Neugeschäft wird ab 1984 allerdings nur in den beiden Standardtarifen im Verhältnis 60% Tarif I, 40% Tarif II getätigt. Die neuen Tarife III bis V werden entweder wegen mangelnder Nachfrage oder aus bewußter Verkaufspolitik nicht mehr abgeschlossen.

Variante B: Konstantes Neugeschäft, Forcierung der neuen Tarife. Das Neugeschäft des Jahres 1983 wird für die Zukunft als konstant unterstellt. Es findet jedoch eine Verlagerung aus den Standardtarifen in alle neuen Tarife statt. Die prozentuale Aufteilung auf die fünf Tarife sieht folgendermaßen aus:

Tarif	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
Anteil	35%	25%	5%	15%	20%

Variante C: Konstantes Neugeschäft, verstärktes Geschäft in den Schnelltarifen. Das Neugeschäftsvolumen des Jahres 1983 wird zukünftig mit einem höheren Anteil in den beiden Schnelltarifen realisiert. Im einzelnen wird folgende Aufteilung angenommen:

Tarif	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
Anteil	45%	25%	10%	20%	—

Variante D: Konstantes Neugeschäft, verstärktes Geschäft im Langzeittarif. Der erhöhte Anteil von 30% des Langzeittarifs geht hauptsächlich zu Lasten des Tarifs I.

Tarif	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
Anteil	35%	35%	—	—	30

Variante E: Konstantes Neugeschäft, reduzierter Schnellspareranteil. Hier wird neben dem unveränderten Neugeschäftsniveau unterstellt, daß die gleiche Aufteilung des Neugeschäfts auf die Tarife realisiert wird wie in der Normalprognose. Durch kollektivsteuernde Maßnahmen gelingt es der Bausparkasse, den Schnellspareranteil am Neugeschäft zugunsten von Ratensparern von 10,4% auf 5% zu senken.

Variante F: Konstantes Neugeschäft, reduzierte Anteile der wartezeitverkürzenden Sparerschichten. Bei unverändertem Neugeschäftsniveau muß die Bausparkasse eine Reduzierung der Anteile der kollektivfreundlichen Sparerschichten (Darlehensverzichter, Kündiger, Fortsetzer) hinnehmen. Dieser Trend ist in den vergangenen Jahren in der Bausparpraxis bereits zu beobachten gewesen. Die weitere Abnahme kann als Weiterführung dieser Entwicklung oder als Folge zusätzlicher Einsparungsmaßnahmen bei der staatlichen Förderung des Bausparens aufgefaßt werden. Im einzelnen werden folgende Reduzierungen unterstellt.

	Darlehens-verzichter	Kündiger	Fortsetzer
Normalprognose	9%	11.46%	8.18%
Variante F	5%	6%	4%

Variante G: 20% Neugeschäftszuwachs in 1984. Bei gleicher prozentualer Zusammensetzung wie in der Normalprognose wird unterstellt, daß das Niveau des Neugeschäfts 1984 um 20% steigt und anschließend den erreichten Wert beibehält.

Variante H: 20% Neugeschäftsrückgang in 1984. Das Neugeschäftsvolumen sinkt in 1984 um 20% und bleibt anschließend konstant. Die Zusammensetzung des Neugeschäfts entspricht der Normalprognose.

Variante I: Anhaltendes Neugeschäftswachstum von jährlich 2% bei Kollektivzusammensetzung wie in der Normalprognose.

Die beschriebenen 10 Varianten (einschließlich der Normalprognose als Variante N) wurden mit dem Simulationsmodell durchgerechnet. Zur Berechnung der Ertragsgrößen wurden dabei Marktzinssätze von 7,5% für die Anlage freier Masse und 8,5% für die Aufnahme von Fremdgeld unterstellt. Spargeld- und Tilgungseingänge wurden zum Quartalsanfang getätigt. In den folgenden Abbildungen 6.XLIII bis 6.LI sind die zeitlichen Entwicklungen des Anlegungsgrades, der Zinsspanne und des Zinsüberschusses der zehn Varianten dargestellt.

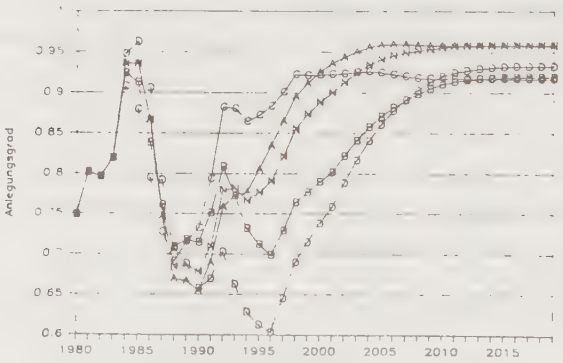

Abb. 6.XLIII: Anlegungsgrade bei Tarifsteuerung (Varianten N, A, B, C, D)

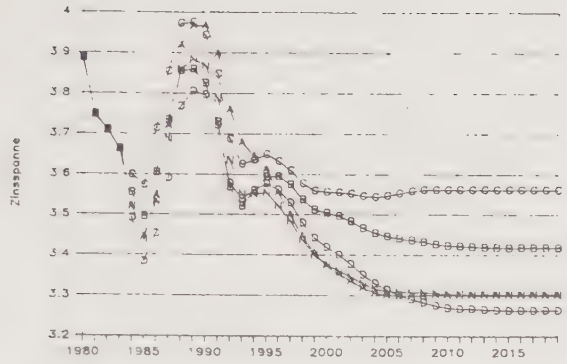

Abb. 6.XLIV: Zinsspannen bei Tarifsteuerung (Varianten N, A, B, C, D)

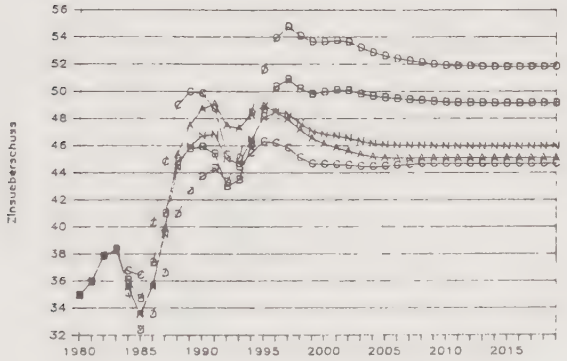

Abb. 6.XLV: Zinsüberschüsse bei Tarifsteuerung (Varianten N, A, B, C, D)

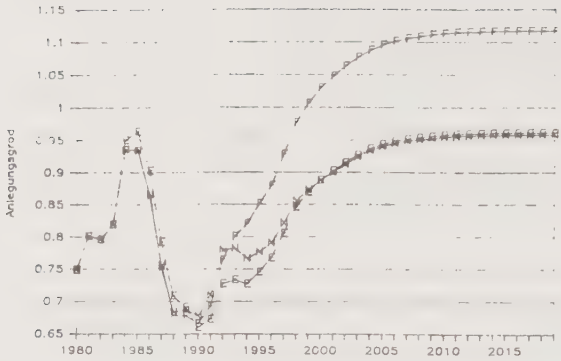

Abb. 6.XLVI: Anlegungsgrade bei Kollektivsteuerung (Varianten N, E, F)

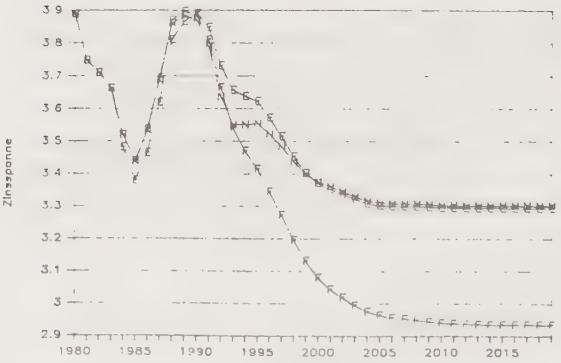

Abb. 6.XLVII: Zinsspannen bei Kollektivsteuerung (Varianten N, E, F)

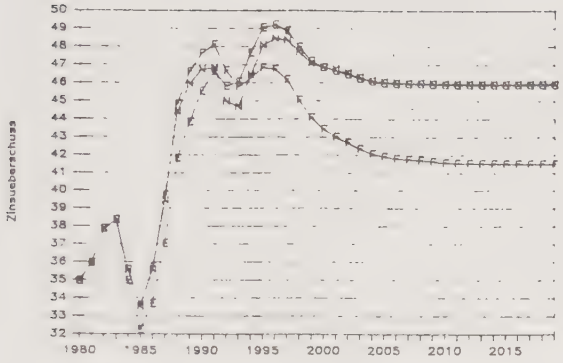

Abb. 6.XLVIII: Zinsüberschüsse bei Kollektivsteuerung (Varianten N, E, F)

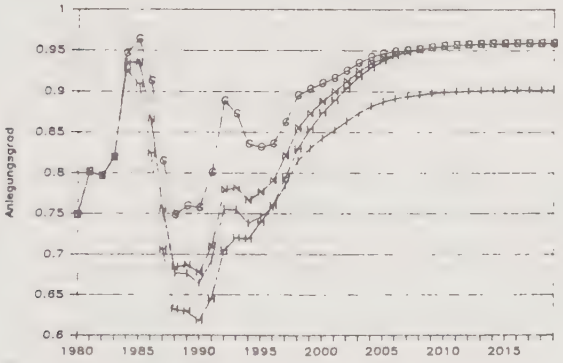

Abb. 6.IL: Anlegungsgrade bei Neugeschäftsänderungen (Varianten N, G, H, I)

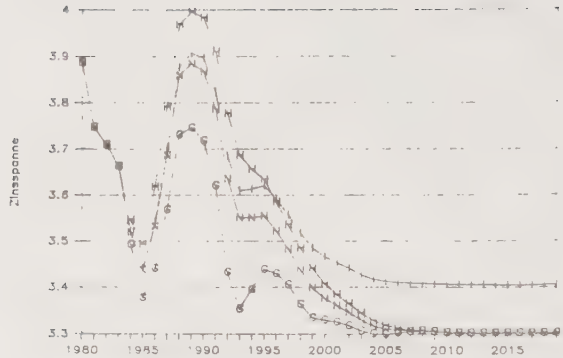

Abb. 6.L: Zinsspannen bei Neugeschäftsänderungen (Varianten N, G, H, I)

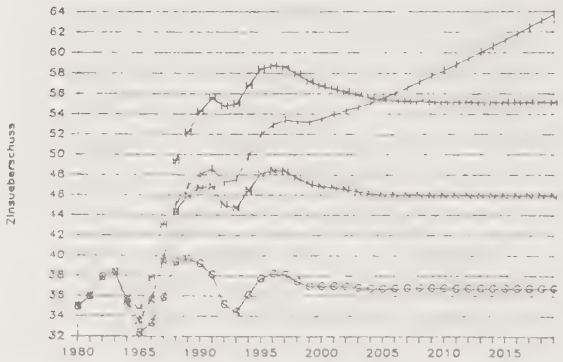

Abb. 6.LI: Zinsüberschüsse bei Neugeschäftsänderungen (Varianten N, G, H, I)

Der zeitliche Verlauf des Anlegungsgrades in der Normalprognose und in den Varianten A – I (Abbildungen 6 XLIII, 6 XLVI, 6.IL) wird hauptsächlich durch zwei Faktoren beeinflußt. Es handelt sich dabei um den starken Neugeschäftsrückgang in den Jahren 1981/82 und die Veränderungen des Schnellspareranteils am Neugeschäft. Der Schnellspareranteil ist im Bestandsanpassungsmodell stark rückläufig (1977: $\approx$ 25% , 1983: $\approx$ 10%). Dies stimmt mit der bewußten Kollektivsteuerung einiger Bausparkassen in den letzten Jahren zur Reduzierung des

Schnellspareranteils überein. Zusammen mit dem gegenüber der Neugeschäftsspitze in 1980 um 24% niedrigeren Neugeschäft führt diese Entwicklung zu erheblichen Reduzierungen des Spargeldeingangs. Das Wachstum der Bauspareinlagen schwächt sich dadurch ab, kurzfristig ist der Einlagenbestand sogar rückläufig. Der Bauspardarlehensbestand bleibt von diesen Entwicklungen zunächst unberührt und wächst weiter an. So kommt es in den Jahren 1984/85 zu einer Spitze des Anlegungsgrades in allen Varianten, die zwischen 0.91 und 0.96 liegt. Ab den Jahren 1985/86 macht sich der seit 1975 rückläufige Schnellspareranteil im Zuteilungsvolumen bemerkbar. Die Schichten, die für die Schnellsparer im Kollektiv substituiert wurden, sind in diesen Jahren noch nicht zuteilungsreif, während die Schnellsparer jetzt bereits zur Zuteilung anstünden. Dadurch ergibt sich eine Entlastung der Liquiditätslage, die so lange anhält, bis die substituierenden Schichten in den Jahren 1988/89 in die Zuteilung gelangen.

Bis zu diesem Zeitpunkt nehmen alle betrachteten Varianten sehr ähnliche Verläufe. Diese Tatsache macht angesichts der stark verschiedenen Neugeschäftszusammensetzungen die dominierende Rolle des Altbestandes besonders deutlich. Auch diese erheblichen Unterschiede in den Annahmen führen im mittelfristigen Bereich nur zu relativ geringen Auswirkungen. Erst nach 5 – 7 Jahren sind in der Anlegungsgradentwicklung größere Abweichungen zu verzeichnen.

In Variante A, in der die neuen Tarife nicht enthalten sind, steigt der Anlegungsgrad von 1990 an fast gleichmäßig auf sein stationäres Niveau von 0.96. Die Abweichungen der Normalprognose und der Varianten B, C, D von diesem Verlauf sind auf den Anteil der neuen Tarife zurückzuführen. In N, B und C steigt der Anlegungsgrad nach 1988 wegen der einsetzenden Zuteilungen in den Schnelltarifen schneller als in Variante A. Das nochmalige Absinken ab dem Jahr 1992 erklärt sich daraus, daß die Sparer des Langzeittarifs noch auf ihre Zuteilung warten müssen, während die substituierten Schichten wie in Variante A bereits zugeteilt würden. Dementsprechend ist das nachfolgende lokale Minimum in den Varianten B und D mit hohem Anteil des Langzeittarifs besonders stark ausgeprägt.

Das langfristig reduzierte Anlegungsgradniveau der Varianten B, C, D ist durch die kollektivgünstigere Konstruktion der neuen Tarife gegenüber den Standardtarifen bedingt. Aus Abbildung 6.XLIII wird deutlich, daß Änderungen in der Zusammensetzung des Neugeschäfts aus verschiedenen Tarifen über einen

Zeitraum von etwa 25 Jahren erhebliche Effekte auf den Anlegungsgrad ausüben.

Die Effekte von Änderungen der Kollektivzusammensetzung können gegenüber der Tarifsteuerung nach einem anderen zeitlichen Muster und in ganz anderen Größenordnungen verlaufen (vgl. Abbildung 6.XLVI). Die Reduzierung des Schnellspareranteils in Variante E führt sehr bald zu geringen Abweichungen des Anlegungsgrades von der Normalprognose, die im Beharrungszustand jedoch fast wieder wegfallen. Der Rückgang von Darlehensverzichtern, Kündigern und Fortsetzern in Variante F führt erst ab dem Jahr 1993 zu dann aber drastischen Verschlechterungen der Liquiditätslage. Im Beharrungszustand liegt der Anlegungsgrad um 32% höher als in der Normalprognose.

Nachhaltige Neugeschäftsveränderungen beeinflussen den Anlegungsgrad ebenfalls für einen Zeitraum von etwa 25 Jahren (vgl. Abbildung 6.IL). Die Anlegungsgradentwicklungen der Varianten G und H verlaufen strukturell so wie in der Normalprognose, sie entfernen sich jedoch bis zu 22% von deren Niveau. Exponentielles Wachstum wie in Variante I läßt den Anlegungsgrad gegenüber der Normalprognose bis zum Beharrungszustand stetig absinken.

Zinsspanne und Zinsüberschuß nehmen von der Struktur her in allen Varianten einen fast spiegelbildlichen Verlauf zur Anlegungsgradentwicklung. Dies ist Ausdruck der Tatsache, daß die Verwendung freier Zuteilungsmasse eine dominierende Wirkung auf die Ertragslage einer Bausparkasse hat. Änderungen in der Liquiditätslage führen aufgrund externer Verzinsung zu wesentlich stärkeren Effekten auf den Zinsüberschuß und die Zinsspanne als Kollektivverschiebungen.

Das insgesamt hohe Niveau der Zinsspanne (3,2 - 4) erklärt sich daraus, daß Spar- und Tilgungseingänge am Quartalsanfang unterstellt werden und daß die Darlehensgebühr zinsanteilig aufgelöst in der Zinsspanne berücksichtigt wird (vgl. hierzu 3.2.1.7 und 6.1.1).

Das langfristige Niveau der Zinsspanne liegt in den Varianten N, A, E, G und H, in denen der Anteil der Standardtarife am Neugeschäft vorherrscht, bei 3,3. Die davon abweichenden langfristigen Zinsspannen der Varianten B, C und D erklären sich aus dem Anteil der neuen Tarife, deren Zinsspannen von der Tarifkonstruktion her bereits von denen der Standardtarife verschieden sind.

Aus dem Vergleich der langfristigen Entwicklungen der Zinsspannen und Zinsüberschüsse der Varianten B, C, D lassen sich die Effekte der einzelnen Tarife

auf die Ertragslage gut studieren, da die langfristigen Anlegungsgrade dieser drei Varianten fast gleich sind. Mit zunehmendem Anteil des Langzeittarifs sinkt die Zinsspanne ab. Der Effekt bei den Zinsüberschüssen ist gerade umgekehrt. Trotz niedrigerer Zinsspanne sind die Zinsüberschüsse bei verstärktem Anteil des Lanzeittarifs höher. Dies liegt an der bilanzverlängernden Wirkung des Langzeittarifs und an der bilanzverkürzenden Wirkung der Schnelltarife. Kollektive mit hohem Anteil des Langzeittarifs haben bei gleichem Neugeschäft im Beharrungszustand deutliche höhere Bestände an Bauspareinlagen und Bauspardarlehen als die Standard- und Schnelltarife. So kann der Zinsüberschuß bei reduzierter Zinsspanne gegenüber anderen Varianten steigen.

6.4.2 Berechnung einer bauspartechnischen Rückstellung

Die Frage nach steuerlich anerkannten bauspartechnischen Rückstellungen ist durch die diesbezüglichen, von Gramer[1] in seiner Dissertation aufgestellten Thesen und Forderungen in die aktuelle Diskussion geraten. Gramer begründet seine Forderung nach der steuerlichen Anerkennung und Verpflichtung zur Bildung solcher Rückstellungen im wesentlichen damit, daß die Gewinne, die eine Bausparkasse aus der Anlage freier Zuteilungsmittel zieht, in späteren Phasen der Kollektiventwicklung für die Aufnahme von Fremdgeld verwendet werden sollen. In der Anlaufphase oder Expansionsphasen von Bausparkollektiven kann aus der überschüssigen Masse ein Zinsgewinn erwirtschaftet werden. In der Liquidationsphase einer Bausparkasse können die letzten Bausparer nur noch Darlehen erhalten, wenn diese aus Kapitalmarktmitteln refinanziert werden. Gramer argumentiert nun, daß die Bausparkassen verpflichtet seien, die dafür aufzubringenden Kosten aus den früheren Gewinnen zu decken. Nur so könne der Rechtsanspruch aller Bausparer auf ein Bauspardarlehen erfüllt werden.

Es soll hier nicht geprüft werden, ob eine Thesaurierung von Zinsgewinnen mit dieser Begründung den rechtlichen Anforderungen an die Bildung von steuerlich anerkannten Rückstellungen genügt. Im Hinblick darauf seien hier lediglich zwei

[1] vgl. Gramer, W., Das Wartezeitproblem ..., a.a.O., S. 200 – 233.

Punkte angemerkt, die bei der gegenwärtigen Rechtslage [1] Probleme aufwerfen können. Zum einen ist der Zeitpunkt völlig unsicher, zu dem die Rückstellungen für eine Fremdgeldaufnahme aufgelöst werden müßten und zum anderen läßt sich über den tatsächlichen Auflösungsbedarf in einem solchen Fall wenig sagen. Eine Zurechnung dieses Auflösungsbedarfs auf einzelne Abschlußjahrgänge oder sogar Verträge ist ebenfalls kaum möglich.

Unbestreitbar ist dagegen, daß der dargestellte Sachverhalt unter die betriebswirtschaftliche Abgrenzung des Rückstellungsbegriffs fällt.[2] Denn mit dem Abschluß und der Besparung von Bausparverträgen erwerben Bausparer einen Rechtsanspruch auf ein Bauspardarlehen. Dieser Anspruch ist zwar der Zeit und der Höhe nach noch unbestimmt, er verpflichtet die Bausparkasse jedoch, dem Bausparer irgendwann Liquidität in Form eines Bauspardarlehens zur Verfügung zu stellen.

In diesem Abschnitt sollen mit Hilfe des Simulationsmodells Verfahren zur Ermittlung des Rückstellungsbedarfs einer Bausparkasse aus betriebswirtschaftlicher Sicht konstruiert werden. Entsprechend der obigen Begründung für bauspartechnische Rückstellungen muß jeder Ansatz hierfür von einem bestimmten Rückgang des Neugeschäfts ausgehen, dessen Folgekosten gerade aus der bauspartechnischen Rückstellung bestritten werden sollen. Aus diesem Grund wird im folgenden auch der Begriff "Schwankungsrückstellung" gebraucht. Dazu wird hier die Zielbewertungszahl und somit die Wartezeitsituation im Bausparkollektiv unverändert gelassen. Das bedeutet, daß die Bausparkasse ihre verschlechterte Liquiditätslage nicht in Form verlängerter Wartezeiten an die Bausparer weitergibt.

Es gibt zwei grundlegend verschiedene methodische Ansätze, den Bedarf an Schwankungsrückstellungen zu quantifizieren. Der unternehmensorientierte Ansatz prognostiziert die zukünftige Entwicklung einer konkreten Bausparkasse

---

[1] vgl. z.B. Adler, H., Düring, W., Schmaltz, K. Rechnungslegung und Prüfung der Aktiengesellschaft, Erl. zu § 152 AktG, Tz. 95 — Bise, W., Probleme bei der Bildung von Rückstellungen in Handels- und Steuerbilanz, in: DB 1975, 2, S. 2341–2346, 2395–2399 — Döllerer, G., Grundsätzliches zum Begriff der Rückstellungen, in: DStZ/A 1975, S. 291–296 — Eifler, G., Grundsätze ordnungsmäßiger Bilanzierung für Rückstellungen, Düsseldorf 1976 — Godin-Wilhelmi, Aktiengesetz, Kommentar, Bd. I, Berlin 1967, Erl. zu § 152, Tz. 146 — Hartmann, H., Rückstellungen bei der Gewinnermittlung, Diss. jur. Göttingen 1973 — Kropff, B., Aktiengesetz, Textausgabe mit Begründung des Regierungsentwurfs und Bericht des Rechtsausschusses des Deutschen Bundestags, Düsseldorf 1965, S. 236f.

[2] vgl. z.B. Melsheimer, H.-J., Die Theorie der Rückstellungen, Diss. rer.pol. Bonn 1968 — Mertens, P., Rückstellungen, in: Kosiol, Erich (Hrsg.), Handwörterbuch des Rechnungswesens, Stuttgart 1970, Sp. 1544–1552.

unter gewissen Annahmen über das Neugeschäft und leitet daraus die notwendige Höhe der Schwankungsrückstellung ab. Der generelle Ansatz abstrahiert von den konkreten Gegebenheiten eines bestimmten Bausparkollektivs und versucht, den Rückstellungsbedarf möglichst allgemeingültig als Funktion eines Neugeschäftseinbruchs darzustellen.

6.4.2.1 Der unternehmensorientierte Ansatz

Der unternehmensorientierte Ansatz setzt voraus, daß für das konkrete Bausparkollektiv ein verläßliches Prognoseinstrument zur Verfügung steht, mit dem die Liquiditäts- und Ertragslage der Bausparkasse unter verschiedenen Annahmen über das Neugeschäft prognostiziert werden kann. Das Simulationsmodell stellt in Verbindung mit einer optimierten Bestandsanpassung für die betreffende Bausparkasse ein solches Prognoseinstrument dar.

Die Berechnung des unternehmensbezogenen Rückstellungsbedarfs kann mit diesem Instrumentarium in der Weise erfolgen, daß mit dem Bestandsanpassungsmodell verschiedene denkbare Zukunftsszenarien mit Neugeschäftsrückgängen bei gleichbleibender Zielbewertungszahl simuliert werden. Für jede dieser Alternativen liefert das Simulationsmodell unter anderem die prognostizierten Entwicklungen des Zinsüberschusses und der Zinsspanne aus dem Bauspargeschäft. Durch einen Vergleich der Zinsüberschüsse mit den erwarteten Kosten der zukünftigen Jahre läßt sich für jedes Jahr der Auflösungsbedarf ermitteln, der durch die unterstellte Neugeschäftsentwicklung bedingt ist. Durch eine Abzinsung dieser Werte auf die Gegenwart und anschließende Summierung ergibt sich für jedes Szenario die Höhe der Schwankungsrückstellung, die ausreicht, um die Ertragseinbußen aus den Neugeschäftsrückgängen auszugleichen. Der dann tatsächlich zurückzustellende Betrag hängt von den Erwartungen des Unternehmens an die zukünftige Neugeschäftsentwicklung ab.
Dieser unternehmensorientierte Ansatz zur Bestimmung einer Schwankungsrückstellung ist für die jeweilige Bausparkasse die spezifischste Methode und im Hinblick auf unternehmerische Planungen daher die geeignetste. Sie setzt jedoch einen relativ hohen Aufwand voraus, denn die Erstellung eines optimierten Bestandsanpassungsmodells ist dafür unerläßlich. Zudem stellt diese Methode hohe Ansprüche an die hausinterne Datenerfassung und Statistik einer Bausparkasse, ohne die ein optimiertes Bestandsanpassungsmodell nicht sinnvoll

ist. Die Ergebnisse dieses unternehmensorientierten Ansatzes sind wegen der Berücksichtigung der spezifischen Gegebenheiten einer bestimmten Bausparkasse nicht auf andere Bausparkollektive übertragbar.

6.4.2.2 Der generelle Ansatz

Ziel des generellen Ansatzes ist es, unabhängig von der konkreten Situation einer bestimmten Bausparkasse eine Methode für die Berechnung der notwendigen Höhe einer bauspartechnischen Schwankungsrückstellung zu finden. Hierin liegt vom Begriff der Rückstellung her eigentlich bereits ein Paradoxon. Eine Bausparkasse mit einem vergleichsweise niedrigen Anlegungsgrad von 0.6 bis 0.7 wird sich durch einen 20 – 30%-igen Neugeschäftsrückgang nicht unbedingt genötigt sehen, Rückstellungen zur Finanzierung von Fremdgeldaufnahmen aufzulösen. Ihr Anlegungsgrad wird zwar mittelfristig ansteigen. Die Schwelle von 1 wird dadurch jedoch nicht unbedingt überschritten, so daß eine Aufnahme von Fremdgeld nicht notwendig ist. Im eigentlichen Sinn hat eine solche Bausparkasse keinen Auflösungsbedarf und benötigt daher keine Schwankungsrückstellung. Eine Bausparkasse mit einem Ausgangs-Anlegungsgrad von etwa 0.9 dagegen wird durch den gleichen Neugeschäftsrückgang zumindest vorübergehend gezwungen sein, Fremdgeld aufzunehmen. Die dafür aufzubringenden Kosten könnten aus einer früher gebildeten Schwankungsrückstellung entnommen werden.

Offensichtlich spielt die Ausgangslage einer Bausparkasse im Zeitpunkt eines Neugeschäftsrückganges eine dominierende Rolle für die Höhe des tatsächlichen Auflösungsbedarfs. In diesem Sinne kann es also keine allgemeingültige Berechnungsmethode für den Rückstellungsbedarf geben. Die dominierenden Effekte der Ausgangslage müssen in einer generellen Methode eliminiert werden, so daß etwa für die beiden als Beispiel angeführten Bausparkassen der gleiche "Rückstellungsbedarf" errechnet würde. Dann stimmt jedoch die Interpretation als "Rückstellungsbedarf" nicht mehr, wie das obige Beispiel zeigt. Vielmehr gibt die zu entwickelnde Methode die kumulierten Ertragseinbußen an, die durch Neugeschäftsrückgänge auf eine Bausparkasse zukommen können. Ob aufgrund dieser Ertragseinbußen Schwankungsrückstellungen aufgelöst werden müssen oder nicht, hängt entscheidend von der Ausgangssituation der Kasse ab.

Für möglichst allgemeingültige Aussagen ist der Beharrungszustand als Analyseinstrument die geeignete Basis. Der generelle Ansatz geht daher davon

aus, daß sich alle Bausparkollektive, die betrachtet werden, bereits in ihrem statischen Beharrungszustand mit dem Anlegungsgrad 1 befinden. Der generelle Ansatz ist also eine Untersuchung mit dem klassischen Mittel der Bausparmathematik, dem Beharrungszustand beim Anlegungsgrad 1. Dadurch ergeben sich für die Übertragung der Ergebnisse in die Bausparpraxis die bereits erläuterten Probleme (vgl. z. B. 5.1.1). Den Ergebnissen dieses Abschnitts kommt also mehr theoretischer Wert zu. Die in der Bausparpraxis immer gegebenen Abweichungen von der wichtigen Analysevoraussetzung des Beharrungszustandes können die Aussagen dieses Abschnittes für eine bestimmte Bausparkasse stark verändern. Aus diesem Grund ist für konkrete Aussagen der unternehmensorientierte Ansatz vorzuziehen.

Ein zu betrachtendes Kollektiv wird bei konstantem Neugeschäft und fixierter Zielbewertungszahl so lange simuliert, bis es den Beharrungszustand erreicht hat. Danach wird ein nachhaltiger Rückgang des Neugeschäfts um einen bestimmten Prozentsatz 100 – y unterstellt, d. h. ab diesem Zeitpunkt beträgt das Neugeschäft konstant y Prozent des alten Neugeschäfts. Die Zusammensetzung des Neugeschäfts bleibt unverändert, lediglich das Niveau wird reduziert. Es ist klar, daß durch diese nur einmalige Veränderung im Neugeschäft der erreichte Beharrungszustand des Kollektivs verlassen wird. Da nach dem Einbruch auch wieder konstante Verhältnisse herrschen, strebt das Kollektiv wiederum gegen einen Beharrungszustand. Da die Struktur des Geschäfts nicht verändert wird, ist dieser neue Beharrungszustand qualitativ der gleiche wie der erste Beharrungszustand. Nur das Niveau aller kollektiven Bestände ist auf y% der alten Werte reduziert.

Durch das niedrigere Neugeschäft sinkt der Spargeldeingang und mit ihm der kollektive Bauspareinlagenbestand ab. Dieses Absinken dauert so lange, bis der letzte Sparer der alten Neugeschäftsjahrgänge zugeteilt wird. Ab dessen Zuteilung haben die Bauspareinlagen ihr neues stationäres Niveau erreicht. Der kollektive Bauspardarlehensbestand bleibt von dem Rückgang solange unberührt, bis der erste Sparer der reduzierten Neugeschäftsjahrgänge in die Zuteilung gelangt. Ab diesem Zeitpunkt sinkt auch der Darlehensbestand solange, bis der letzte Sparer der alten Abschlußjahrgänge sein Darlehen vollständig getilgt hat. In diesem Zeitpunkt ist daher der neue Beharrungszustand erreicht. Der Anlegungsgrad des Bausparkollektivs steigt also bis zur Zuteilung des letzten Sparers der nicht reduzierten Neugeschäftsjahrgänge an und sinkt dann bis zu dessen Abwicklung wieder auf das Ausgangsniveau ab.

Für den Ertragsbereich werden hier der kollektive und der außerkollektive Zinsüberschuß getrennt betrachtet. Der kollektive Zinsüberschuß $_{KZ}\tilde{U}_t$, der sich aus Guthabenszinsen, Darlehenszinsen und den Gebühren bei Zuteilung zusammensetzt, steigt zunächst an, da den gleichbleibenden Darlehenszinsen wegen des Absinkens der Bauspareinlagen schrittweise verringerte Guthabenszinsen gegenüberstehen. Ab der Zuteilung des letzten alten Sparers sinkt der kollektive Ertrag wegen der nun auch sinkenden Darlehenszinsen auf sein neues stationäres Niveau von y% des alten ab. Der außerkollektive Zinsüberschuß $_{AZ}\tilde{U}_t$, der aus den Erträgen für angelegte Zuteilungsmasse und den Kosten für Fremdgeldaufnahmen besteht, nimmt gerade den umgekehrten Verlauf wie der kollektive Ertrag. Solange der Anlegungsgrad steigt, muß zusätzliches Fremdgeld aufgenommen werden. Dadurch sinkt der außerkollektive Ertrag. In der Phase sinkenden Anlegungsgrades steigt der außerkollektive Ertrag wieder auf sein neues stationäres Niveau an, das ebenfalls y% des alten Niveaus beträgt.

Der gesamte Zinsüberschuß $_{Z}\tilde{U}_t$ als Summe von $_{KZ}\tilde{U}_t$ und $_{AZ}\tilde{U}_t$ verändert seinen Wert also im neuen stationären Zustand ebenfalls auf y% des alten Niveaus. Ob dies gegenüber dem Ausgangszustand ein Absinken oder einen Anstieg bedeutet, hängt vom Vorzeichen des Zinsüberschusses in der Ausgangssituation ab. War der Zinsüberschuß im ersten Beharrungszustand positiv, so sinkt er langfristig auf y% dieses Wertes ab. War er anfangs jedoch z. B. infolge eines sehr hohen Anlegungsgrades negativ, so steigt er auf y% des Anfangswertes an. Das gleiche gilt prinzipiell auch für $_{KZ}\tilde{U}_t$ und $_{AZ}\tilde{U}_t$. Da hier zur Ermittlung des Rückstellungsbedarfs immer vom Anlegungsgrad 1 ausgegangen wird, ist der kollektive Zinsüberschuß im Beharrungszustand größer als Null und der außerkollektive Zinsüberschuß gleich Null. Für die vorliegenden Betrachtungen kommt also nur das Absinken des gesamten Zinsüberschusses $_{Z}\tilde{U}_t$ auf y% des alten Wertes in Frage.

In der folgenden Abbildung 6.LII sind schematisch die zeitlichen Entwicklungen der beschriebenen Größen aufgetragen:

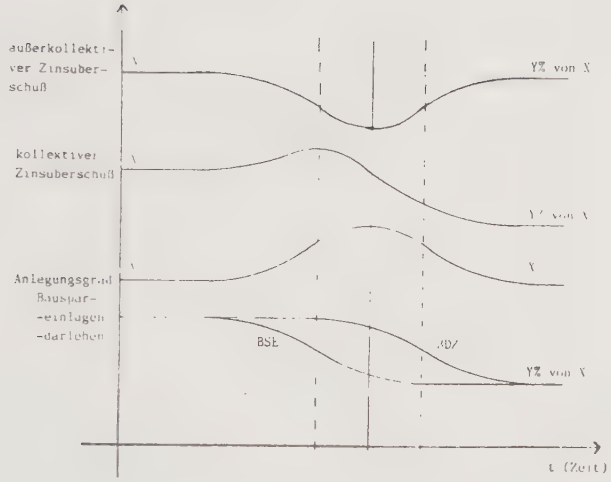

Abb. 6.LII: Zeitliche Entwicklung der Bestands– und Ertragsgrößen eines Bausparkollektivs nach einem Neugeschäftseinbruch (schematische Darstellung)

Bei den bisherigen Betrachtungen blieb offen, wie der gesamte Zinsüberschuß zwischen den beiden Beharrungszuständen verläuft. Als Summe zweier Größen, die entgegengesetzten Verlauf aufweisen, kann er je nach Konstellation zunächst steigen (Einfluß von $KZ\bar{U}_t$ dominiert) oder sinken (Einfluß von $AZ\bar{U}_t$ dominiert). Aus einer einfachen Überlegung heraus erkennt man jedoch, daß der Einfluß von $AZ\bar{U}_t$ praktisch ohne Ausnahme dominiert, der Zinsüberschuß also zunächst absinkt, um dann wieder auf sein neues stationäres Niveau zu steigen. Denn der Anstieg von $KZ\bar{U}_t$ erklärt sich aus der fallenden Guthabensverzinsung wegen der sinkenden Bauspareinlagen. Gleichzeitig sinkt der außerkollektive Zinsüberschuß um die externe Verzinsung desselben Betrages. Der Gesamteffekt ist also negativ, wenn der Marktzins größer ist als der kollektive Guthabenszinssatz. Wegen der niedrigen Habenzinssätze im Bausparen ist dies praktisch immer der Fall. Der schematische Verlauf des gesamten Zinsüberschusses hat also typischerweise die in Abbildung 6.LIII dargestellte Form.

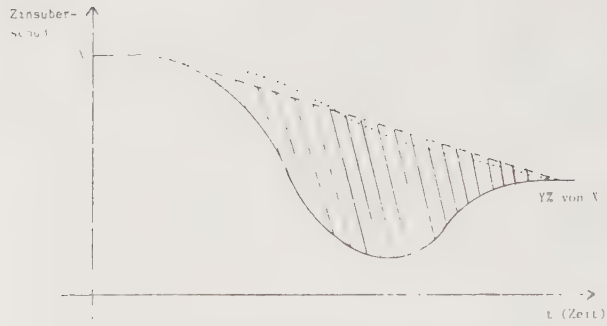

Abb. 6.LIII: Schematischer Verlauf des Zinsüberschusses nach einem Neugeschäftseinbruch

Da die Struktur der beiden Beharrungszustände die gleiche ist, entsprechen auch die Niveaus des Zinsüberschusses unter der Voraussetzung linearer Kostenverläufe dem gleichen relativen Gewinn. Als isolierter Effekt der konstant gehaltenen Wartezeitsituation auf den Zinsüberschuß kann daher die Differenz zwischen der tatsächlichen Entwicklung und einer gestrichelt in 6.LIII eingetragenen, gleichmäßigen Entwicklung des Zinsüberschusses aufgefaßt werden. Diese Differenz entspricht gerade der schraffierten Fläche zwischen den Kurven.

Die gestrichelte Linie entspricht in etwa dem Ertragsverlauf, der sich ergäbe, wenn die Bausparkasse die aus dem Neugeschäftsrückgang resultierenden Liquiditätsprobleme durch Korrekturen der Zielbewertungszahl an die Bausparer weitergäbe. Bei einer Anlegungsgradsteuerung mit dem stationären Anlegungsgrad (hier immer gleich 1) als Zielanlegungsgrad resultiert eine geschwungene Ertragsentwicklung, die in Abbildung 6.LIII gepunktet dargestellt ist. Die Unterschiede zum hypothetischen linearen Verlauf heben sich in der Summe in etwa auf, da die positiven und negativen Flächen zwischen diesen beiden Kurven etwa gleich sind. Für die Berechnung der kumulierten Ertragseinbußen ist der lineare Verlauf jedoch von großem Vorteil, da bei seiner Verwendung auf die entsprechende Simulation mit Anlegungsgradsteuerung verzichtet werden kann.

Der durch einen Neugeschäftsrückgang bedingte Rückstellungsbedarf wird also definiert als die Summe der auf den gegenwärtigen Zeitpunkt abdiskontierten Beträge, die in den Jahren nach dem Einbruch notwendig wären, um die

Ertragsdifferenzen auszugleichen, die sich gegenüber einer Anlegungsgradsteuerung dadurch ergeben, daß die Zielbewertungszahl konstant gehalten wird. In dieser Definition ist der Rückstellungsbedarf von drei wesentlichen Einflußfaktoren abhängig. Der zu berechnende Flächeninhalt variiert offensichtlich mit der Höhe des Marktzinses für Fremdgeldaufnahmen und mit der Höhe des Neugeschäftseinbruches. Die Form und die zeitliche Ausdehnung der Fläche hängt zudem vom jeweiligen Bausparkollektiv ab, denn die Dauer des Übergangs zwischen den Beharrungszuständen ist gerade der längste der im unterstellten Kollektiv vorkommenden Abwicklungszeiträume einzelner Sparerschichten.

Daß Marktzins und Ausmaß des Neugeschäftsrückgangs in jeder Formel zur Bestimmung des Rückstellungsbedarfs als Einflußfaktoren vorhanden sein müssen, leuchtet unmittelbar ein. Die Kollektivzusammensetzung als bestimmender Faktor würde die Anwendbarkeit einer solchen Formel stark einschränken, da der Wissensstand der Bausparkassen über die Zusammensetzung ihrer Bausparkollektive hierzu nicht ausreichend ist. Deswegen wird im folgenden untersucht, ob die Größenordnungen des Rückstellungsbedarfs bei unterschiedlichen Kollektiven möglicherweise so ähnlich sind, daß sich eine praktikable, vom Kollektiv unabhängige, Formel finden läßt.

Zu diesem Zweck werden für alle wichtigen Tarife des Bausparsystems Rückstellungsberechnungen vorgenommen. Dabei wird so vorgegangen, daß Kollektive betrachtet werden, die jeweils aus nur einer Sparerschicht in einem Tarif bestehen. Mit dem Formelmodell werden die Zielbewertungszahlen ermittelt, bei denen sich in den verschiedenen Kollektiven der stationäre Anlegungsgrad 1 ergibt. Mit diesen Zielbewertungszahlen werden für jeden Einzelfall Simulationsrechnungen druchgeführt, die Neugeschäftseinbrüche um 10%, 20%, 30%, 40% und 50% unterstellen. Für jede dieser Simulationsrechnungen wird mit der oben erläuterten Flächenberechnungsmethode der Rückstellungsbedarf ermittelt, der sich bei Marktzinssätzen von 7%, 8%, ..., 12% ergibt. Für jeden Einzelfall (d. h. eine Sparerschicht in einem Tarif) wird so also der Rückstellungsbedarf in 30 verschiedenen Situationen berechnet, die sich durch den Marktzins und die Höhe des Neugeschäftsrückganges unterscheiden. Diese jeweils 30 Beobachtungen wurden dazu benutzt, Hypothesen über ein mögliches Bildungsgesetz des Rückstellungsbedarfs zu testen. Mit der Methode der linearen Regression wurden verschiedene mögliche Funktionsformen überprüft. Dabei stellte

sich für alle untersuchten Einzelfälle der folgende Regressionsansatz als überlegen heraus:

$$R = (100 - y) \cdot (\alpha + \beta \cdot MZ) \tag{6.1}$$

mit: R : Rückstellungsbedarf

$(100 - y)$: Höhe des Neugeschäftseinbruchs in %

MZ : Marktzins

α, β : Regressionsparameter

Für den nicht abdiskontierten (also einfach aufsummierten) Rückstellungsbedarf ergab (6.1) in allen Fällen eine nahezu vollständige Erklärung. Das Bestimmtheitsmaß R^2 betrug im schlechtesten Fall 0.999, die mittlere absolute prozentuale Abweichung lag immer unter 0.01%. Zusätzlich wurde der Rückstellungsbedarf R auf den Zeitpunkt des Neugeschäftseinbruchs mit dem jeweiligen Marktzins abdiskontiert. Dadurch ergaben sich etwas schlechtere Bestimmtheitsmaße und höhere prozentuale Abweichungen bei den Regressionsrechnungen, jedoch waren alle Ansätze statistisch hochgradig signifikant.

Daraus ergibt sich anhand von (6.1) der unmittelbar einleuchtende Schluß, daß die Höhe des Rückstellungsbedarfs proportional zur prozentualen Höhe des Neugeschäftseinbruchs ist. Der Proportionalitätsfaktor ist dabei eine lineare Funktion des Marktzinssatzes.

In der folgenden Tabelle 6.LIV sind die Parameter α und β für verschiedene Tarife und Sparverhalten zusammengestellt:

	Rueckstellungsbedarf			
	summiert		diskontiert	
Hochzins-Standardtarif				
Regelsparer	-0.606	0.142	-0.043	0.035
Ueberregelsparer	-0.416	0.098	-0.070	0.034
Soforteinzahler(50%)	-0.300	0.088	-0.087	0.046
Soforteinzahler(40%)	-0.678	0.179	-0.110	0.070
Niedrigzins-Standardtarif				
Regelsparer	-0.549	0.144	0.005	0.034
Ueberregelsparer	-0.374	0.099	-0.033	0.033
Soforteinzahler(50%)	-0.284	0.095	-0.051	0.047
Soforteinzahler(40%)	-0.592	0.187	-0.011	0.067
Hochzins-Schnelltarif				
Regelsparer	-0.287	0.064	-0.084	0.027
Ueberregelsparer	-0.183	0.046	-0.056	0.022
Soforteinzahler(50%)	-0.189	0.053	-0.081	0.032
Niedrigzins-Schnelltarif				
Regelsparer	-0.256	0.064	-0.055	0.026
Ueberregelsparer	-0.161	0.046	-0.036	0.022
Soforteinzahler(50%)	-0.164	0.053	-0.057	0.032
Hochzins-Langzeittarif				
Regelsparer	-1.751	0.318	-0.192	0.056
Ueberregelsparer	-1.081	0.218	-0.146	0.051
Soforteinzahler(50%)	-1.071	0.243	-0.255	0.092
Niedrigzins-Langzeittarif				
Regelsparer	-1.234	0.303	0.090	0.039
Ueberregelsparer	-0.794	0.215	0.051	0.043
Soforteinzahler(50%)	-0.718	0.243	0.042	0.081

Tabelle 6.LIV: Rückstellungsbedarf in Prozent des Neugeschäfts als lineare Funktion des Marktzinses

Der Parameter β gibt die Höhe des Rückstellungsbedarfs in Prozent des Neugeschäfts an, der sich bei einem Neugeschäftseinbruch von einem Prozent für jedes zusätzliche Prozent des Marktzinssatzes ergibt. Parameter

α ist jeweils der Basis-Rückstellungsbedarf bei einem Marktzins von 0%. Beim summierten Rückstellungsbedarf entspricht α somit den kumulierten Veränderungen des kollektiven Zinsüberschusses durch einen einprozentigen Neugeschäftsrückgang. Entsprechende Regressionen, die diese kollektiven Veränderungen nicht berücksichtigen, resultieren deswegen in $\alpha = 0$ und gleichem β wie in Tabelle 6.LIV. Beim diskontierten Rückstellungsbedarf trifft diese Interpretation nicht durchgängig zu, da die linearen Regressionen diesen Fall nicht wie den summierten Rückstellungsbedarf vollständig erklären.

Die Ergebnisse aus Tabelle 6.LIV sind relativ stark abhängig vom Bauspartarif und vom Sparverhalten. So beträgt β für den summierten Rückstellungsbedarf eines Regelsparerkollektivs im Hochzins-Langzeittarif etwa das 6,9-fache wie bei einem Überregelsparerkollektiv im Hochzins-Schnelltarif. Die Höhe des Rückstellungsbedarfs steigt wie bereits erwähnt tendenziell mit der Abwicklungsdauer des unterstellten Sparverhaltens. So finden sich die höchsten β-Werte bei den Langzeittarifen und die niedrigsten bei den Schnelltarifen. Die Abwicklungsdauer einer Sparerschicht ist positiv korreliert mit dem Bilanzvolumen des induzierten Bausparkollektivs.

Durch eine Angabe des Rückstellungsbedarfs in Prozent der Bauspareinlagen statt in Prozent des Neugeschäfts kann der Effekt der Abwicklungsdauer auf den Rückstellungsbedarf weitgehend eliminiert werden. Zudem hat dies den Vorteil, daß die Höhe des Rückstellungsbedarfs nicht an die starken Schwankungen unterliegenden Flußgröße Neugeschäft geknüpft wird, sondern an die Bestandsgröße Bauspareinlagen. Der Regressionsansatz unterscheidet sich von (6.1) lediglich durch den Faktor $\frac{BSE}{100}$:

$$R = (100 - y) \cdot \frac{BSE}{100} \cdot (\gamma + \delta \cdot MZ). \qquad (6.2)$$

Die statistischen Eigenschaften dieser Regressionsrechnungen sind die gleichen wie bei Ansatz (6.1), da es sich lediglich um eine lineare Datentransformation handelt. Die Parameter γ, δ für die verschiedenen Tarife und Sparverhalten sind in Tabelle 6.LV festgehalten:

	Rueckstellungsbedarf			
	summiert		diskontiert	
Hochzins-Standardtarif				
Regelsparer	-0.257	0.060	-0.018	0.015
Ueberregelsparer	-0.212	0.050	-0.036	0.017
Soforteinzahler(50%)	-0.154	0.045	-0.044	0.024
Soforteinzahler(40%)	-0.243	0.064	-0.039	0.025
Niedrigzins-Standardtarif				
Regelsparer	-0.231	0.061	0.002	0.014
Ueberregelsparer	-0.190	0.050	-0.017	0.017
Soforteinzahler(50%)	-0.141	0.047	-0.025	0.024
Soforteinzahler(40%)	-0.208	0.066	-0.004	0.024
Hochzins-Schnelltarif				
Regelsparer	-0.178	0.040	-0.052	0.017
Ueberregelsparer	-0.135	0.034	-0.041	0.016
Soforteinzahler(50%)	-0.124	0.035	-0.053	0.021
Niedrigzins-Schnelltarif				
Regelsparer	-0.160	0.040	-0.034	0.016
Ueberregelsparer	-0.119	0.034	-0.027	0.016
Soforteinzahler(50%)	-0.107	0.035	-0.037	0.021
Hochzins-Langzeittarif				
Regelsparer	-0.486	0.088	-0.053	0.016
Ueberregelsparer	-0.375	0.076	-0.051	0.018
Soforteinzahler(50%)	-0.335	0.076	-0.080	0.029
Niedrigzins-Langzeittarif				
Regelsparer	-0.350	0.086	0.026	0.011
Ueberregelsparer	-0.271	0.073	0.017	0.015
Soforteinzahler(50%)	-0.221	0.076	0.013	0.025

Tabelle 6.LV: Rückstellungsbedarf in Prozent der Bauspareinlagen als lineare Funktion des Marktzinses

Die Abhängigkeit des Parameters δ von der Abwicklungsdauer ist deutlich geringer als die von β. Innerhalb der einzelnen Tarife streut δ erheblich weniger als β. Auch über die Tarife macht die Streuung nur noch einen Faktor von maxi-

mal 2.6 aus. Damit kann man zwar noch nicht von einer kollektivunabhängigen Berechnungsformel sprechen, jedoch ist der Einfluß der Kollektivzusammensetzung auf die Höhe des Rückstellungsbedarfs nicht dominierend. In der folgenden Tabelle ist exemplarisch für drei verschiedene Situationen der Rückstellungsbedarf als Prozentsatz der Bauspareinlagen berechnet:

Marktzins Neugeschaefts- rueckgang	Rueckstellungsbedarf bei 7 % 30 %		10 % 20 %		6 % 50 %	
	summ.	disk.	summ.	disk.	summ.	disk.
Hochzins-Standardtarif						
Regelsparer	4.91	2.58	6.88	2.62	5.19	3.56
Ueberregelsparer	4.14	2.54	5.77	2.72	4.40	3.37
Soforteinzahler(50%)	4.88	3.64	5.97	3.85	5.87	4.88
Soforteinzahler(40%)	6.20	4.06	7.99	4.21	7.13	5.52
Niedrigzins-Standardtarif						
Regelsparer	5.79	3.05	7.50	2.89	6.62	4.37
Ueberregelsparer	4.87	2.98	6.27	2.98	5.60	4.14
Soforteinzahler(50%)	5.66	4.19	6.60	4.20	7.07	5.80
Soforteinzahler(40%)	7.55	4.84	8.98	4.65	9.30	6.89
Hochzins-Schnelltarif						
Regelsparer	2.97	2.00	4.36	2.35	2.97	2.48
Ueberregelsparer	3.08	2.18	4.09	2.43	3.44	2.82
Soforteinzahler(50%)	3.55	2.83	4.44	3.15	4.18	3.66
Niedrigzins-Schnelltarif						
Regelsparer	3.53	2.35	4.73	2.53	3.90	3.11
Ueberregelsparer	3.59	2.54	4.44	2.65	4.28	3.44
Soforteinzahler(50%)	4.05	3.23	4.78	3.39	5.02	4.35
Hochzins-Langzeittarif						
Regelsparer	3.94	1.67	7.92	2.05	2.15	2.00
Ueberregelsparer	4.61	2.22	7.60	2.55	3.90	2.81
Soforteinzahler(50%)	5.94	3.68	8.53	4.18	6.09	4.68
Niedrigzins-Langzeittarif						
Regelsparer	7.55	3.08	10.19	2.71	8.29	4.58
Ueberregelsparer	7.29	3.58	9.27	3.26	8.48	5.24
Soforteinzahler(50%)	9.05	5.61	10.51	5.24	11.35	8.11

Tabelle 6.LVI: Rückstellungsbedarf in % Bauspareinlagen

Die Kosten für die Konstanthaltung der Wartezeitsituation bei einem 30%-igen Neugeschäftseinbruch und einem Marktzinssatz von 7% betragen summiert je nach zugrundegelegtem Kollektiv zwischen 3.0% und 9.0% der Bauspareinlagen. Bei Diskontierung der Kosten mit dem Marktzins von 7% liegt dieser Satz zwischen 1.7% und 5.6%. Im Vergleich mit den beiden anderen Fällen wird deutlich, daß die Sätze für verschiedene Kollektive umso stärker differrieren, je höher die Neugeschäftseinbuße ist.

Die Formel (6.2) darf nicht in der Weise mißverstanden werden, daß sie den konkreten Rückstellungsbedarf einer bestimmten Bausparkasse in Prozent ihres Bauspareinlagenbestandes quantifizieren könnte. Diese Formel ist nur richtig unter den Annahmen, die durch die gewählte Form der Analyse anhand des Beharrungszustandes impliziert werden. Insbesondere spielt die Höhe des Anlegungsgrades eine wesentliche Rolle. Durch die zwangsläufigen Abweichungen von dessen unterstelltem Wert (1) können sich wesentlich verschiedene Zahlen ergeben. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkungen gibt (6.2) in Verbindung mit den Werten der Tabelle 6.LV jedoch einen wertvollen Einblick in die grundsätzliche Strukturierung des Rückstellungsbedarfs.

Sparphase

ABGEB	Abschlußgebühr
SOFORT	Soforteinzahlung
SOFABG	*SOFORT* — *ABGEB*
k	Zahl der Perioden bis zur Abzahlung der Abschlußgebühr
R	Rest von *SOFABG* in Periode *k*
VERGEB	Bearbeitungsgebühr
SRATE	monatliche Sparrate
SPER	Anzahl Perioden pro Jahr in der Sparphase
SR	Perioden-Sparrate
SRV	Perioden-Sparrate, korrigiert um die Bearbeitungsgebühr
GUTZIN	Guthabenszins
g	Verzinsungsfaktor für die Sparphase
BONZIN	Bonuszins
BSE	Bausparguthaben
BONUS	Bonusguthaben

Bewertungsverfahren

SFAKT	Saldenfaktor
SFPER	Saldenfaktor, umgerechnet auf eine Periode
KFAKT	Kapitalfaktor
ZFAKT	Zinsfaktor
NFAKT	Nennerfaktor

Zuteilung

BWZIEL	Zielbewertungszahl
MINANS	Mindestanspargrad
EINMAL	Zuzahlung vor Zuteilung
GR	Verschub bis Guthabensauszahlung
DR	Verschub bis Darlehensauszahlung
tz	Wartezeit bis zur Zuteilung
SL	Sparerleistung

Darlehensphase

ABGREN	über die Darlehensphase abgegrenzte Gebühren
BDZ	Bauspardarlehen
NDAR	Nettodarlehen
DARZIN	Darlehenszins
d	Verzinsungsfaktor für die Darlehensphase
DAMNUM	Darlehensgebühr
AGIO	Agio
DISAG	Disagio
FIXDAR	Fixierte Darlehenshöhe
DPER	Anzahl der Perioden pro Jahr in der Darlehensphase
TRATE	monatliche Tilgungsrate
TR	Perioden-Tilgungsrate
TRW_0	Perioden-Tilgungsrate, korrigiert um Wachstumsfaktor w
VT	Bearbeitungsgebühr, umgerechnet auf eine Periode
BWZMIN	Untere Bewertungszahlgrenze
BWZMAX	Obere Bewertungszahlgrenze
TRMIN	Kleinste Tilgungsrate
TRMAX	größte Tilgungsrate
w	jährlicher Zuwachs der Tilgungsrate
tt	Tilgungsdauer
KL	Kassenleistung
K/S	Kassen- zu Sparerleistung (Belastungsgrad)

Kollektivgrößen

ANLEG	Anlegungsgrad
NVS	Neuabschlußvolumen
VSNZ	nicht zugeteilter Vertragssummenbestand
VSZ	zugeteilter Vertragssummenbestand
ZKVS	Zuteilungen und Kündigungen
$\bar{r}$	jährliche Wachstumsrate des Neugeschäfts
r_S	Perioden-Wachstumsrate in der Sparphase
r_D	Perioden-Wachstumsrate in der Darlehensphase
y_S	$\frac{1}{1+r_S}$
y_D	$\frac{1}{1+r_D}$

Die wichtigsten Formeln und Bestimmungsgleichungen des Formelmodells aus Teil 3

Das Bausparguthaben eines Vertrages in der t-ten Periode beträgt:

$$BSE_t^S = g^{t-k}\left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ g^{k-1} + R\right) - \frac{SRV}{g-1} + EIN\,.$$

Für die Saldensumme eines Bausparvertrages zum Zeitpunkt t gilt:

$$SS_t^S = \frac{g^{t+k-1}-g}{g-1}\left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R\right) - \frac{SRV(t-k)}{g-1} + EIN + R\,.$$

Die Sparerleistung eines Vertrages in der Periode t ergibt sich unmittelbar aus der Saldensumme. Sie hängt jedoch davon ab, ob die regelmäßigen Sparzahlungen am Periodenanfang (SL_t^A) oder am Periodenende (SL_t^E) geleistet werden:

$$SL_t^A = \frac{1}{SPER} SS_t\,.$$

$$SL_t^E = \frac{1}{SPER} SS_{t-1}\,.$$

Die Saldensumme bei Zuteilung nach einer Guthabensruhezeit GR beträgt:

$$SS_{t+GR}^{SW} = \left(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R\right)\frac{g^{t-k+GR+1}-g}{g-1}$$
$$- \frac{SRV}{g-1}\left(t-k+\frac{g^{GR+1}-g}{g-1}\right)$$
$$+ EINMAL\,\frac{g^{GR+1}-1}{g-1} + R\,.$$

Die Bestimmungsgleichung für die Spardauer t, nach der die Zielbewertungszahl $BWZIEL$ erreicht wird, lautet:

$$0 = g^t[(SFPER + \frac{g-1}{g}(KFAKT + ZFAKT)) \cdot \frac{1}{g^{k-1}}$$

$$\cdot (\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R)]$$

$$- t[SRV(SFPER + ZFAKT(g-1))]$$

$$- [SFPER \quad g(\frac{SRV}{g-1} + SOFABG^+ \cdot g^{k-1} + R)$$

$$+ (KFAKT + ZFAKT - SFPER \cdot k)SRV \quad + (g-1)(NFAKT \cdot BWZIEL$$

$$- (SFPER + KFAKT)EINMAL + ZFAKT \cdot SOFABG - SFPER \cdot R)] .$$

Das Anfangsdarlehen BDZ_0 ergibt sich aus dem Nettodarlehen, das entweder vom Guthaben bei Zuteilung abhängt ($NDAR = 1 - BSE^{Zut}$) oder fixiert ist ($NDAR = FIXDAR$) :

$$BDZ_0 = (1 + DAMNUM + AGIO)NDAR .$$

Das Bauspardarlehen eines Vertrages in der Periode t nach Zuteilung ist:

$$BDZ_t^{SW} = BDZ_0 \cdot d^t + VT\frac{d^t - 1}{d-1} - TRW_0\frac{d^t - w^t}{d-w} .$$

Die Bestimmungsgleichung für die Tilgungsdauer lautet:

$$0 = d^t \cdot [BDZ_0 + \frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}] + w^t\frac{TRW_0}{d-w} - \frac{VT}{d-1}$$

Für die Kassenleistung KL_{tt}^{WA} eines Vertrages bei Einzahlungen am Periodenanfang gilt:

$$DPER \cdot KL_{tt}^{WA} =$$

$$[(BDZ_0 + \frac{VT}{d-1})\frac{d^{tt+1} - 1}{d-1} - (tt+1)\frac{VT}{d-1} - \frac{TRW_0}{d-w}(\frac{d^{tt+1} - 1}{d-1} - \frac{w^{tt+1} - 1}{w-1})$$

$$- BDZ_0] .$$

Abkürzungsverzeichnis

a.a.O.	am angegebenen Ort
ABB	Allgemeine Bedingungen für Bausparverträge
AktG	Aktiengesetz
Aufl.	Auflage
Bd.	Band
BFH	Bundesfinanzhof
BKVO	Bausparkassenverordnung
BMF	Bundesministerium für Finanzen
BspkG	Bausparkassengesetz
DB	Der Betrieb
DBB	Deutsche Bundesbank
DGVM	Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik
Diss.	Dissertation
DStZ/A	Deutsche Steuer-Zeitung, Ausgabe A
Erl.	Erläuterungen
evtl.	eventuell
Hrsg.	Herausgeber
S.	Seite
u.U.	unter Umständen
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

Adler, H./Düring, W./Schmaltz, K., *Rechnungslegung und Prüfung der Aktiengesellschaft*, Handkommentar, Bd.1 Rechnungslegung, 4., völlig neu bearbeitete Aufl., Stuttgart 1968.

Beckerath, U. von, *Beitrag zur Bausparkassen-Mathematik*, in: Blätter für Versicherungsmathematik, Bd.1 (1928–1930), S. 271–283.

Beckerath, U. von, *Bausparkassen-Mathematik*, in: Das Versicherungsarchiv, Jg. 2 (1931), Nr.1, S. 1–15.

Bise, W., *Probleme bei der Bildung von Rückstellungen in Handels- und Steuerbilanz*, in: DB 1975, 2, S. 2341–2346, 2395–2399.

Bock, H., *Das kollektive Bausparen*, Frankfurt/M. 1984.

Bundesaufsichtsamt für das Versicherungs- und Bausparwesen, *Ablehnung der Einführung eines neuen Bausparkassen-Tarife*, Beschlußkammerentscheidung vom 6.10.1969, Veröffentlichungen des Bundesaufsichtsamtes, 1969, S. 357.

Bundesfinanzhof, *Urteil IV R 153/72 vom 19.1.1978*, Bundessteuerblatt 1978, Teil II Nr.9, S. 262–265.

Bundesgeschäftsstelle Landesbausparkassen, *Bausparkassenfachbücher 1980–1984*, Bonn.

Bundesgeschäftsstelle Landesbausparkassen, *Jahresberichte 1957–1983*, Bonn.

Bundesministerium der Finanzen, *Schreiben IV B2–S2170–33/78 vom 4.9.1978*, Bundessteuerblatt 1978, Teil I, Nr. 17, S. 352.

Control Data Corporation, *APEX-III Reference Manual*, Publication No. 76070000, Control Data Corporation 1979.

Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton, New Jersey 1963.

Deutsche Bundesbank, *Monatsberichte*, 36. Jahrgang, Nr.4, April 1984.

Döllerer, G., *Grundsätzliches zum Begriff der Rückstellungen*, in: DStZ/A 1975, S. 291–296.

Eifler, G., *Grundsätze ordnungsmäßiger Bilanzierung für Rückstellungen*, Düsseldorf 1976.

Godin-Wilhelmi, *Aktiengesetz*, Kommentar, Bd.I, Berlin 1967.

Gramer, W., *Das Wartezeitproblem der Bausparkassen*, Diss. Freie Universität Berlin 1983.

Hartmann, H., *Rückstellungen bei der Gewinnermittlung*, Diss. jur. Göttingen 1973.

Heubeck, G., *Beiträge zur mathematischen Theorie des Bausparens*, Diss. Göttingen 1937.

International Buisiness Machines Corporation, *IBM Mathematical Programming System Extended 370 (MPSX/370) Basic Reference Manual*, IBM-Publication SH19–1127–0, Paris 1976.

Köpf, E., *Zuteilungen und Wartezeiten — bausparmathematisch betrachtet*, in: Der Volkswirt, Jg. 1958, Beilage zu Heft 43.

Kohlhase, D., *Die Geschäftspolitik der öffentlichen Bausparkassen*, Diss. Hamburg 1970.

Krahn, A., *Technik des deutschen Bausparens*, Ludwigsburg 1955.

Krahn, A./Kaltenboeck, B., *Das deutsche Bausparen*, Berlin 1931.

Krelle, W., *Produktionstheorie*, Tübingen 1969.

Kropff, B., *Aktiengesetz*, Textausgabe mit Begründung des Regierungsentwurfes und Bericht des Rechtsausschusses des Deutschen Bundestags, Düsseldorf 1965.

Laux, H., *Das kollektive Bausparen*, Heidelberg 1973.

Laux, H., *Der Anlaufeffekt im kollektiven Bausparen bei gleichbleibenden und steigenden Neuzugängen*, in: Blätter der DGVM, Bd.XI, 1973/74, S. 565–604.

Laux, H., *Die Bausparfinanzierung*, 2. Auflage, Heidelberg 1966.

Laux, H., *Die Wartezeitverlängerung im Bausparen bei Einstellung der Sparzahlungen nach Erreichen eines bestimmten Prozentguthabens*, in: Blätter der DGVM, Bd.XII, 1975/76, S. 143–152.

Laux, H., *Die Zinsspanne der Bausparkassen bei gleichzeitigem Angebot von 3/5%- und 2,5/4,5%-Bauspartarifen*, in: Blätter der DGVM, Bd.XIV, 1979/80, S. 461–486.

Laux, H., *Grundzüge der Bausparmathematik*, in: Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 8, Karlsruhe 1978.

Laux, H., *Über den Einfluß von Veränderungen der wartezeitverkürzenden Faktoren auf die Wartezeiten im Bausparkollektiv*, in: Blätter der DGVM, Bd.XIII, 1977/78, S. 145–177.

Laux, H., *Verlauf der Wartezeiten im kollektiven Bausparen bei verschlechterten Zugangsverhältnissen*, in: Blätter der DGVM, Bd.XII, 1975/76, S. 57–77.

Lehmann, W., *Die Bausparkassen*, Taschenbücher für Geld, Bank und Börse, Band 5, 3. Aufl., Frankfurt/M. 1965.

Lehmann, W., *Gründungsgeschichte und Systementwicklung der privaten Bausparkassen im Altreich*, in: Lehmann, W. (Hrsg.), Beiträge zur Entwicklung des privaten Bausparwesens, Berlin 1940, S. 3–116.

Lehmann, W., *Wegbereiter der Bausparkassen*, in: Festschrift Knoblauch, Beiträge zur Theorie und Praxis des Wohnungsbaus, Bonn 1959.

Lehmann, W./Schäfer, O., *Bausparkassengesetz und Bausparkassenverordnung*, Bonn 1973.

Luenberger, D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Reading–Menlo Park–London–Don Mills 1973.

Lütge, F., *Wohnungswirtschaft*, 2. Auflage, Stuttgart 1949.

Melsheimer, H.-J., *Die Theorie der Rückstellungen*, Diss. rer.pol. Bonn 1968.

Mertens, P., *Rückstellungen*, in: Kosiol, E. (Hrsg.), Handwörterbuch des Rechnungswesens, Stuttgart 1970, SP. 1544–1552.

Moeller, E., *Die bauspargerechte Zuteilung nach dem Belastungsgrad*, in: Privates Bausparwesen 1952, Bonn, S. 51–55.

Riebesell, P., *Bausparmathematik*, in: Wirtschaft und Recht der Versicherung, Jg. 63 (1931), Nr. 3.

Schönfeld, P., *Methoden der Ökonometrie*, Bd.I und II, München 1971.

Schwegler, H., *Ein Beitrag zur Theorie des stationären Zustands in der Bausparkassenmathematik*, in: Das Versicherungsarchiv, Jg. 2 (1932), Nr. 8, S. 48 ff..

Stoer, J., *Einführung in die Numerische Mathematik I*, Berlin–Heidelberg–New York 1972.

Vajda, S., *Der derzeitige Stand der Bausparmathematik*, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1933.

Verband der privaten Bausparkassen, *Berichte über die Geschäftsjahre 1957-1983*, Bonn.

Weber, L., *Die öffentlichen Bausparkassen und ihre Bedingungen*, 4. Aufl., Sparkassenheft Nr.2, Stuttgart 1961.

Zink, A., *Mathematische Aspekte des Vor- und Nachsparens im Rahmen der Wohnungseigentumsfinanzierung*, in: Beckmann, M./ Eichhorn, W./Krelle, W. (Hrsg.), Mathematische Systeme in der Ökonomie, Königstein/Ts. 1983.

Hiermit versichere ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Dissertation ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt und andere als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Lebenslauf des Verfassers

Am 20.01.1956 wurde ich in Weiden/Opf. geboren.

Die Volksschule besuchte ich von 1962 bis 1966 in Friesdorf bei Bad Godesberg. Anschließend besuchte ich die Sexta des Friedrich-Ebert-Gymnasiums in Bonn. Anfang 1967 wurde ich Schüler des Collegium Josephinum Bonn, an dem ich 1974 das Abitur ablegte.

Im Wintersemester 1974/75 begann ich an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn mit dem Studium der Mathematik/Sportwissenschaft, das ich nach dem Grundwehrdienst im Sommersemester 1976 wieder aufnahm. Im Wintersemester 1976/77 wechselte ich zum Studium der Volkswirtschaftslehre, das ich im November 1981 mit dem Diplom abschloß. Meine Diplomarbeit mit dem Thema "Untersuchungen zu Verfahren der Linearen Programmierung" schrieb ich bei Professor Dr. B. Korte.

Ab Juli 1980 war ich als studentische Hilfskraft am Institut für Ökonometrie und Operations Research tätig. Seit 1.12.1981 bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft an diesem Institut beschäftigt.

Seit 28.8.1981 bin ich mit Gertraud Gotterbarm, geb. Reichel verheiratet.